



Мінск «Асар» 1998

У.У.Шлыкаў
Т.У.Валахановіч

Задачы па стэрэаметрыі



10–11

У.У.Шлыкаў
Т.У.Валахановіч

Задачы па стэрэаметрыі

Вучэбны дапаможнік
для 10—11 класаў
агульнаадукацыйнай школы
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь



Мінск
«Асар»
1998

УДК 514.113.(075.3)
ББК 22.151.Оя 721
Ш 69

У афармленні кнігі выкарыстаны рысункі У.У. Шлыкава

Ш 69 **Шлыкаў У.У., Валахановіч Т.У.**
Задачы па стэрэаметрыі: Вучэб. дапаможнік для 10 – 11 кл. агульнаадукац. шк. з беларус. мовай навучання / Рыс. У.У. Шлыкаў. – Мн.: Асар, 1998. – 240 с.: іл.

ISBN 985-6070-48-1.

ББК 22.151.Оя 721

ISBN 985-6070-48-1

Змест

Прадмова

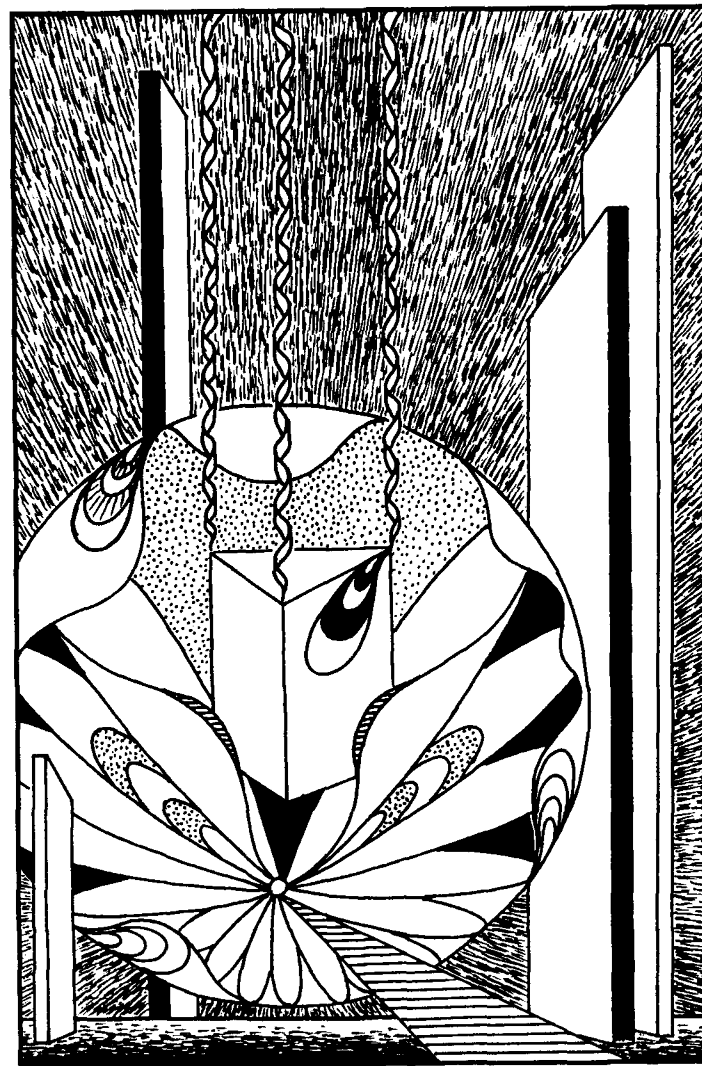
Прапанаваны дапаможнік складаецца з шасці раздзелаў па канкрэтных тэмах стэрэаметрыі: *прызма; паралелепіпед, куб; піраміда; цыліндр; конус; сфера, шар.* У пачатку кожнага раздзела прыведзены тэарэтычныя факты і формулы стэрэаметрыі, якія выкарыстоўваюцца для рашэння задач, затым разглядаюцца рашэнні некаторых тыповых задач па дадзенай тэме і прапануюцца задачы для самастойных заняткаў. Для гэтых задач у канцы кожнага раздзела дадзены адказы і ўказанні, якія прыводзяцца ў кампактнай і паслядоўнай , крок за крокам, форме, што дазваляе хутчэй зразумець ход рашэння і ў той жа час патрабуе ад чытача асэнсавання і абгрунтавання гэтых крокаў.

Кніга з'яўляецца лагічным прадаўжэннем вучэбнага дапаможніка «Задачы па планіметрыі» У.У. Шлыкава, выдадзенага для вучняў 7 – 9 класаў. Тут захавана такая ж форма рысунка – неабходнага апорнага сігналу, які садзейнічае засваенню вывучаемага матэрыялу і развіццю прасторавых уяўленняў у вучняў, а таксама тэматычны падбор задач.

Дапаможнік прызначаецца для вучняў старэйшых класаў школ, гімназій, ліцэяў, дзе вывучаюць стэрэаметрыю, а таксама для індывідуальнай падрыхтоўкі да выпускнога або ўступнага экзамена па матэматыцы. Ен будзе карысным для настаўнікаў пры арганізацыі самастойнай працы вучняў і абагульняльнага паўтарэння матэрыялу па стэрэаметрыі.

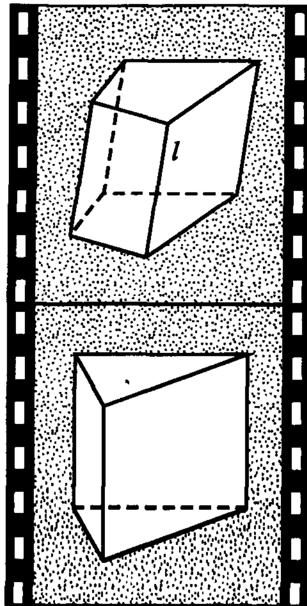
1

Прызма



1. ПРЫЗМА

1.1. Формулы, задачы



Рыс. 1

1. Адвольная прызма (l – бакавы кант; P – перыметр асновы; $S_{асн}$ – плошча асновы; H – вышыня; $P_{сяч}$ – перыметр перпендыкулярнага сячэння; $S_{бак}$ – плошча бакавой паверхні; $S_{поўн}$ – плошча поўнай паверхні; Q – плошча перпендыкулярнага сячэння; V – аб'ём) (рыс. 1).

1) $S_{бак} = P_{сяч} \cdot l$;

2) $S_{поўн} = S_{бак} + 2S_{асн}$;

3) $V = S_{асн} \cdot H$;

4) $V = Q \cdot l$.

2. Прамая прызма (**P – перыметр асновы; l – бакавы кант**)

$S_{бак} = P \cdot l$.

3. Сфера, упісаная ў прызму. Для таго, каб у прызму можна было ўпісаць сферу, неабходна і дастаткова, каб у перпендыкулярнае сячэнне прызмы можна было ўпісаць акружнасць і каб вышыня прызмы была роўная дыяметру гэтай акружнасці.

Цэнтр упісанай у прызму сферы ляжыць на прамой, якая праведзена паралельна бакавым кантам праз цэнтр акружнасці, упісанай у перпендыкулярнае сячэнне, і з'яўляецца сярэдзінай адрэзка, адсякаемага на гэтай прамой асновамі прызмы.

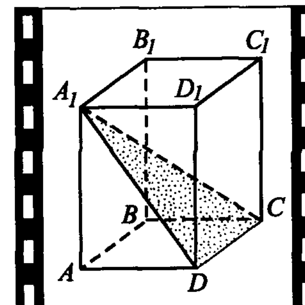
4. Сфера, апісаная каля прызмы. Для таго, каб каля прызмы можна было апісаць сферу, неабходна і дастаткова, каб прызма была прамая і каб каля яе асновы можна было апісаць акружнасць.

Цэнтр сферы, апісанай каля прызмы, з'яўляецца сярэдзінай адрэзка, які злучае цэнтры акружнасцей, апісаных каля асноў прызмы.

5. Сфера, упісаная ў правільную прызму. Для таго, каб у правільную прызму можна было ўпісаць сферу, неабходна і дастаткова, каб яе вышыня была роўная дыяметру акружнасці, упісанай у аснову.

6. Сфера, апісаная каля правільнай прызмы. Каля любой правільнай прызмы можна апісаць сферу.

Задача 1. Дыяганаль правільнай чатырохвугольнай прызмы роўная d і нахілена да бакавой грані пад вуглом α. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні і аб'ём прызмы.



Рыс. 2

Рашэнне. Па ўмове $A_1C = d$, $\angle CA_1D = \alpha$ (вугал паміж A_1C і гранню AA_1D_1D ёсць вугал паміж A_1C і яе артаганальнай праекцыяй на AA_1D_1D). З прамавугольнага трохвугольніка A_1DC ($\angle A_1DC = 90°$) знаходзім $A_1D = A_1C\cos\alpha = d\cos\alpha$, $DC = A_1C\sin\alpha = d\sin\alpha$.

У прамавугольным трохвугольніку A_1AD катэт $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}$.

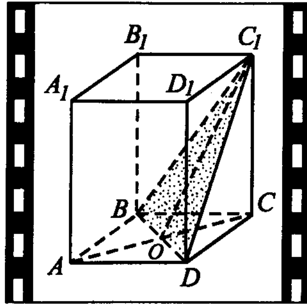
Дадзеная прызма правільная, таму ўсе бакавыя грані роўныя і

$S_{бак} = 4S_{AA_1D_1D} = 4AD \cdot AA_1 = 4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$,

$V = DC^2 \cdot AA_1 = d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$ (рыс. 2).

Задача 2. У правільнай чатырохвугольнай прызме старана асновы роўная a. Праз дыяганаль ніжняй і вяршыню верхняй асноў пра-

ведзена плоскасць, якая перасякае плоскасці, што ўтрымліваюць дзве сумежныя бакавыя грані прызмы па прамых, вугал паміж якімі φ. Знайдзіце аб'ём прызмы.

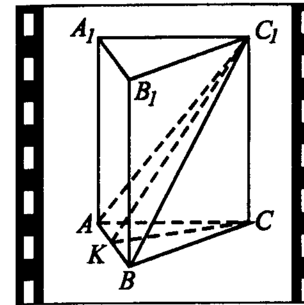


Рыс. 3

Рашэнне. Па ўмове $AD = a$, $\angle BC_1D = \varphi$ (рыс. 3). З прамавугольнага трохвугольніка BCD ($\angle BCD = 90°$) знаходзім гіпатэнузу $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{2}$. Няхай O – пункт перасячэння дыяганалей квадрата $ABCD$, тады $OD = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Дыяганалі BC_1 і DC_1 граняў роўныя, значыць, медыяна OC_1 раўнабедранага трохвугольніка BC_1D з'яўляецца вышынёй і бісектрысай гэтага трохвугольніка. У прамавугольным трохвугольніку C_1OD ($\angle C_1OD = 90°$) знаходзім гіпатэнузу $C_1D = \frac{OD}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$. У трохвугольніку C_1CD ($\angle C_1CD = 90°$) $C_1C = \sqrt{C_1D^2 - DC^2} = \frac{a\sqrt{\cos\varphi}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$.

Такім чынам, $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = \frac{a^3\sqrt{\cos\varphi}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$.

Задача 3. У правільнай трохвугольнай прызме праведзена сячэнне, якое праходзіць праз адну старану ніжняй асновы і процілеглую вяршыню верхняй асновы. Знайдзіце плошчу сячэння, калі старана асновы роўная a, а плоскасць сячэння ўтварае з плоскасцю асновы вугал, роўны α.

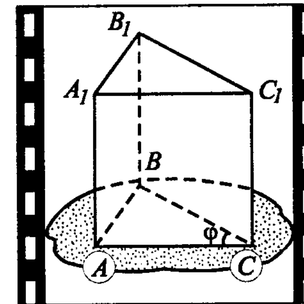


Рыс. 4

Рашэнне. Няхай K – сярэдзіна адрэзка AB. Тады адрэзак CK – артаганальная праекцыя адрэзка C_1K на плоскасць асновы, значыць, $\angle C_1KC = \alpha$. У прамавугольным трохвугольніку CKB ($\angle CKB = 90°$) знаходзім, што катэт $CK = \sqrt{CB^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. З трохвугольніка C_1CK ($\angle C_1CK = 90°$) $C_1K = \frac{CK}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. У трохвугольніку AC_1B адрэзак C_1K з'яўляецца вышынёй ($AB \perp CK$, $AB \perp CC_1$), адсюль вынікае, што $AB \perp C_1K$.

Такім чынам, $S_{ABC_1} = \frac{AB \cdot C_1K}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$ (рыс. 4).

Задача 4. Аснова прамой прызмы – прамавугольны трохвугольнік з плошчай S і вострым вуглом φ. Плошча большай бакавой грані роўная Q. Знайдзіце аб'ём прызмы.



Рыс. 5

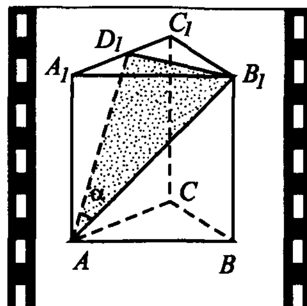
Рашэнне. Няхай $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = \varphi$. Абазначым $AA_1 = h$, $AC = x$. Тады з роўнасці $Q = xh$ знаходзім, што $h = \frac{Q}{x}$. У прамавугольным трохвугольніку ABC $AB = x\sin\varphi$, $BC = x\cos\varphi$. Значыць, $S_{ABC} = S = \frac{x^2 \sin\varphi \cos\varphi}{2}$.

Адсюль вынікае, што $x = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$.

Такім чынам, $h = \frac{Q\sqrt{\sin 2\varphi}}{2\sqrt{S}}$.

Цяпер аб'ём прызмы $V = S_{ABC} \cdot h = \frac{Q\sqrt{S\sin 2\varphi}}{2}$ (рыс. 5).

Задача 5. Дыяганаль бакавой грані правільнай трохвугольнай прызмы, роўная a, утварае вугал α з плоскасцю другой бакавой грані. Знайдзіце аб'ём прызмы.



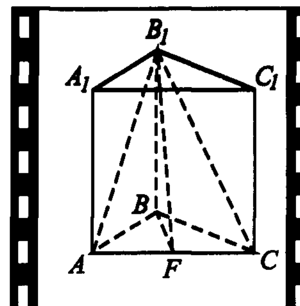
Рыс. 6

Рашэнне. Няхай $AB_1 = a$, D_1 – сярэдзіна адрэзка A_1C_1 (рыс. 6). Тады $B_1D_1 \perp A_1C_1$, $B_1D_1 \perp AA_1$. Адсюль вынікае, што адрэзак B_1D_1 перпендыкулярны плоскасці AA_1C_1. Такім чынам, AD_1 – артаганальная праекцыя AB_1 на плоскасць AA_1C_1, значыць, $\angle B_1AD_1 = \alpha$. З трохвугольніка AD_1B_1 $(\angle AD_1B_1 = 90°)$ знаходзім $B_1D_1 = AB_1 \sin\alpha = a\sin\alpha$. З трохвугольніка $A_1D_1B_1$ $(\angle A_1D_1B_1 = 90°)$ маем $A_1D_1 = B_1D_1 \operatorname{ctg} 60° = \dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}$.

Плошча асновы $S_{асн} = A_1D_1 \cdot B_1D_1 = \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{\sqrt{3}}$. З трохвугольніка ABB_1 $\left(AB = A_1C_1 = 2A_1D_1 = \dfrac{2a\sin\alpha}{\sqrt{3}}\right)$ па тэарэме Піфагора знаходзім вышыню прызмы $BB_1 = \sqrt{AB_1^{\,2} - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{\sqrt{3}}$.

Цяпер аб'ём прызмы $V = S_{асн} \cdot BB_1 = \dfrac{a^3\sin^2\alpha\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{3}$.

Задача 6. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік, у якім вугал паміж роўнымі старанамі – 2α. З вяршыні верхняй асновы праведзены дзве дыяганалі роўных бакавых граняў. Вугал паміж гэтымі дыяганалямі роўны 2β. Знайдзіце адносіну плошчы бакавой паверхні прызмы да плошчы яе асновы.



Рыс. 7

Рашэнне. Няхай $AB = BC = x$. Па ўмове $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle AB_1C = 2\beta$. Абазначым F сярэдзіну адрэзка AC. З прамавугольнага трохвугольніка AFB $(\angle AFB = 90°)$ знаходзім, што $AF = x\sin\alpha$, $BF = x\cos\alpha$. У прамавугольным трохвугольніку AFB_1 $(\angle AFB_1 = 90°)$ $B_1F = AF\operatorname{ctg}\beta = x\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta$. У трохвугольніку B_1BF $(\angle B_1BF = 90°)$ катэт

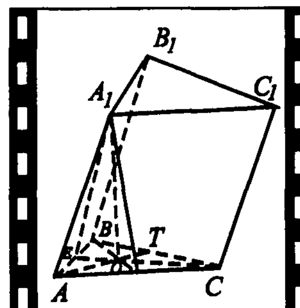
$$BB_1 = \sqrt{B_1F^2 - BF^2} = \frac{x\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{\sin\beta}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin 2\alpha = \frac{x^2}{2}\sin 2\alpha.$$

$$S_{бак} = 2S_{AA_1B_1B} + S_{AA_1C_1C} = \frac{2x^2(1+\sin\alpha)\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{\sin\beta}.$$

Такім чынам, $\dfrac{S_{бак}}{S_{ABC}} = \dfrac{4(1+\sin\alpha)\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{\sin\beta\sin 2\alpha}$ (рыс. 7).

Задача 7. У аснове прызмы ляжыць правільны трохвугольнік, старана якога роўная a. Адна з вяршынь верхняй асновы праектуецца ў пункт перасячэння вышынь трохвугольніка ніжняй асновы. Бакавыя канты прызмы нахілены да плоскасці асновы пад вуглом, роўным α. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні.



Рыс. 8

Рашэнне. Няхай O – пункт перасячэння вышынь AT і CE трохвугольніка ABC. Прамая A_1O перпендыкулярная BC (па ўмове A_1O перпендыкулярная плоскасці ABC) і $AO \perp BC$, значыць, кант AA_1 перпендыкулярны BC. Аналагічна даказваем, што $A_1E \perp AB$ $(OE \perp AB$, $A_1O \perp AB)$. З прамавугольнага трохвугольніка AOA_1 знаходзім $AA_1 =$

$= \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}$ $\left(AO = \frac{2AT}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. У прамавугольным трохвугольніку AOA_1 катэт $A_1O = AO\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{3}}$. У трохвугольніку A_1OE ($\angle A_1OE = 90°$) па тэарэме Піфагора $A_1E = \sqrt{A_1O^2 + OE^2} = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$. Цяпер плошча бакавой паверхні прызмы

$$S_{бак} = 2S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} = 2AB\cdot A_1E + BC\cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}{\sqrt{3}\cos\alpha} + \frac{a^2}{\sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{a^2}{\sqrt{3}\cos\alpha}\left(1 + \sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}\right)$$ (рыс. 8).

1.2. Задачы

1. Дыяганаль бакавой грані правільнай трохвугольнай прызмы роўная a і ўтварае вугал α з плоскасцю другой бакавой грані. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.

2. Аснова прамой трохвугольнай прызмы – раўнабедраны трохвугольнік, у якога стораны, роўныя a, утвараюць вугал α. Дыяганаль грані, процілеглай гэтаму вуглу, утварае з другой бакавой гранню вугал φ. Знайдзіце аб'ём прызмы.

3. Знайдзіце бакавую паверхню правільнай трохвугольнай прызмы вышыні h, калі прамая, якая злучае цэнтр верхняй асновы з сярэдзінай стараны ніжняй асновы, нахілена да плоскасці асновы пад вуглом $60°$.

4. Вышыня правільнай трохвугольной прызмы роўная h. Адрэзак, які злучае цэнтр верхняй асновы з сярэдзінай стараны ніжняй асновы, утварае з плоскасцю асновы вугал α. Знайдзіце поўную паверхню прызмы.

5. У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы ляжыць раўнабокая трапецыя, у якой бакавая старана a роўная меншай старане асновы, а востры вугал роўны α. Знайдзіце аб'ём прызмы, калі вышыня яе роўная дыяганалі асновы.

6. У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы ляжыць раўнабокая трапецыя з вострым вуглом α. Радыус упісанай у аснову акружнасці роўны R. Знайдзіце аб'ём прызмы, калі яе вышыня роўная H.

7. Знайдзіце аб'ём і плошчу бакавой паверхні прамой прызмы, у якой у аснове ляжыць раўнабедраны трохвугольнік з вуглом пры вяршыні α і процілеглай стараной b, калі дыяганаль адной з роўных бакавых граняў нахілена да плоскасці асновы пад вуглом β.

8. У правільнай трохвугольнай прызме вышыня роўная H, а дыяганаль бакавой грані ўтварае з асновай вугал α. Знайдзіце аб'ём прызмы.

9. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні правільнай чатырохвугольнай прызмы, калі плошча асновы прызмы роўная S і дыяганаль прызмы ўтварае з бакавым кантам прызмы вугал α.

10. Знайдзіце аб'ём правільнай шасцівугольнай прызмы, калі вядома, што яе самая вялікая дыяганаль мае даўжыню d і ўтварае з бакавым кантам прызмы вугал α.

11. Асновай нахіленай прызмы з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік са стараной a; адна з бакавых граняў перпендыкулярная аснове і з'яўляецца ромбам, меншая дыяганаль якога роўная c. Знайдзіце аб'ём прызмы.

12. Кожны кант нахіленай трохвугольнай прызмы мае даўжыню a. Адзін з бакавых кантаў утварае з прылеглымі да яго старанамі асновы вуглы па $60°$. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні гэтай прызмы.

13. Асновай нахіленай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік ABC са стараной a. Вяршыня A_1 артаганальна праектуецца ў пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC, кант AA_1 утварае з плоскасцю асновы вугал $45°$. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы.

14. У аснове прызмы – роўнастаронні трохвугольнік; радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік, роўны b. Адна з вяршынь прызмы артаганальна праектуецца ў цэнтр асновы. Бакавы кант прызмы ўтварае з плоскасцю асновы вугал β. Знайдзіце аб'ём прызмы.

15. У правільнай трохвугольнай прызме праз старану ніжняй асновы і сярэдзіну процілеглага канта праведзена плоскасць, якая ўтварае з плоскасцю асновы двугранны вугал у $60°$. Плошча сячэння роўная $8\sqrt{3}$ см². Знайдзіце аб'ём і поўную паверхню прызмы.

16. Плоскасць, якая праходзіць праз старану асновы правільнай трохвугольнай прызмы і сярэдзіну процілеглага канта, утварае з асновай вугал $45°$. Даўжыня стараны асновы роўная a. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы.

17. Аб'ём правільнай трохвугольнай прызмы роўны V, вугал паміж дыяганалямі дзвюх бакавых граняў, якія праведзены з адной вяршыні, роўны α. Знайдзіце старану асновы прызмы.

18. Раўнабедраны трохвугольнік з вуглом пры вяршыні, роўным α, і перыметрам, роўным p, служыць асновай прамой прызмы. Вугал паміж дыяганалямі роўных бакавых граняў прызмы, якія праведзены з адной вяршыні, роўны β. Знайдзіце аб'ём прызмы.

19. У аснове прамой прызмы ляжыць раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік з катэтам a. Дыяганаль большай бакавой грані і дыяганаль другой бакавой грані, якія выходзяць з адной вяршыні, утвараюць паміж сабою вугал α. Знайдзіце аб'ём прызмы.

20. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўная a, вугал паміж дыяганалямі бакавых граняў, якія выходзяць з адной вяршыні, роўны β. Знайдзіце аб'ём прызмы.

21. У правільнай трохвугольнай прызме праведзена сячэнне праз старану асновы і сярэдзіну процілеглага бакавога канта. Знайдзіце плошчу сячэння, калі плошча асновы S, а дыяганаль бакавой грані нахілена да асновы пад вуглом α.

22. У правільнай чатырохвугольнай прызме праведзена сячэнне праз дыяганаль асновы і сярэдзіну процілеглага бакавога канта. Знайдзіце плошчу сячэння, калі перыметр асновы p, а дыяганаль бакавой грані нахілена да асновы пад вуглом φ.

23. Аснова прамой прызмы – трохвугольнік са старанамі 5 см і 3 см і вуглом $120°$ паміж імі. Найбольшая з плошчаў бакавых граняў роўная 35 см². Знайдзіце аб'ём прызмы.

24. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік, аснова якога роўная a, а вугол пры аснове роўны α. Знайдзіце аб'ём прызмы, калі яе бакавая паверхня роўная суме плошчаў яе асноў.

25. У аснове прамой прызмы ляжыць прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 3 см і 4 см. Вышыня прызмы роўная 2 см. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні прызмы.

26. Аснова прамой прызмы – прамавугольны трохвугольнік з плошчай S і вострым вуглом φ. Плошча большай бакавой грані роўная Q. Знайдзіце аб'ём прызмы.

27. Дыяганалі прамой чатырохвугольнай прызмы ўтвараюць з асновай вуглы α і β. Вышыня прызмы роўная H. Знайдзіце аб'ём прызмы, калі дыяганалі асновы перасякаюцца пад вуглом γ.

28. Аснова прамой прызмы – ромб з вышынёй h і вострым вуглом α. Меншая дыяганаль прызмы нахілена да плоскасці асновы пад вуглом β. Знайдзіце аб'ём прызмы.

29. У аснове прамой прызмы ляжыць прамавугольны трохвугольнік, адзін з катэтаў якога роўны 3 см. Дыяганаль бакавой грані прызмы, якая праходзіць праз другі катэт, утварае з плоскасцю асновы прызмы вугал $45°$. Вышыня прызмы роўная 4. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні прызмы.

30. У аснове прамой прызмы ляжыць прамавугольны трохвугольнік. Дыяганалі бакавых граняў прызмы, якія праходзяць праз катэты, утвараюць з плоскасцю асновы прызмы вуглы $30°$ і $60°$. Вышыня прызмы роўная H. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы і яе аб'ём.

31. У шар радыуса R упісана правільная чатырохвугольная прызма, у якой дыяганаль бакавой грані ўтварае з плоскасцю асновы вугал α. Знайдзіце аб'ём прызмы.

32. У шар радыуса R упісана правільная трохвугольная прызма. Вышыня прызмы роўная H. Знайдзіце аб'ём прызмы.

33. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай прызмы a, вышыня ў два разы большая. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы і цэнтр сіметрыі прызмы.

34. Даўжыня кожнага канта правільнай шасцівугольнай прызмы роўная 1 дм. Знайдзіце плошчу сячэння, якое праходзіць праз старану асновы і большую дыяганаль прызмы.

35. У прамой трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ праз пункт A і сярэднюю лінію D_1E_1 асновы $A_1B_1C_1$, паралельную B_1C_1, праведзена сячэнне. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў утвораных частак прызмы.

36. Дадзена прамая трохвугольная прызма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 – бакавыя канты), у якой $AC = 6$ см, $AA_1 = 8$ см. Праз вяршыню A праведзена плоскасць, якая перасякае канты BB_1 і CC_1 адпаведна ў пунктах M і N. Знайдзіце, у якой адносіне дзеліць гэта плоскасць аб'ём прызмы, калі вядома, што $BM = MB_1$, а AN – бісектрыса вугла CAC_1.

37. Праз старану асновы правільнай трохвугольнай прызмы праведзена плоскасць пад вуглом α да плоскасці асновы. Знайдзіце плошчу ўтворанага трохвугольнага сячэння, калі аб'ём піраміды, адсечанай гэтай плоскасцю, роўны V.

38. Праз старану асновы правільнай чатырохвугольнай прызмы праведзена плоскасць пад вуглом $30°$ да плоскасці асновы. Знайдзіце плошчу ўтворанага сячэння, калі аб'ём трохвугольнай прызмы, адсечанай гэтай плоскасцю, роўны $\sqrt{18}$ см.

39. Асновай прамой прызмы служыць правільны трохвугольнік са стараной 4. Пункты K і E з'яўляюцца сярэдзінамі кантаў AB і BC адпаведна, прамыя EA_1 і KC_1 перасякаюцца пад вуглом, роўным φ. Знайдзіце аб'ём прызмы.

40. Асновай прамой прызмы служыць ромб $KBCD$ са стараной a і $\angle DKB = 60°$. Канцы B_1 і D_1 дыяганалі верхняй асновы прызмы злучаны прамымі EB_1 і ED_1 з сярэдзінамі старон KD і KB ніжняй. У перасячэнні гэтых прамых утвараецца вугал B_1OD_1, роўны α. Знайдзіце аб'ём прызмы.

41. У аснове правільнай трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ з бакавымі кантамі AA_1, BB_1, CC_1 ляжыць роўнастаронні трохвугольнік ABC са стараной 4. Знайдзіце аб'ём прызмы, калі вядома, што прамые AB_1 і CA_1 перпендыкулярныя.

42. У прамой трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ праз пункты B, C і A_1 праведзена сячэнне, плошча якога роўная S, а адлегласць ад плоскасці сячэння да вяршыні B_1 роўная h. Знайдзіце аб'ём прызмы.

43. У аснове прамой прызмы ляжыць трохвугольнік. Два яго вуглы адпаведна роўныя α і β, а плошча роўная S. Прамая, якая злучае вяршыню верхняй асновы з цэнтрам круга, апісанага каля ніжняй асновы, утварае з плоскасцю асновы вугал, роўны φ. Знайдзіце аб'ём прызмы.

44. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ мае даўжыню a. Пункт D – сярэдзіна канта AB, пункт E ляжыць на канце A_1C_1. Прамая DE утварае вуглы α і β з плоскасцямі ABC і AA_1C_1C адпаведна. Знайдзіце вышыню прызмы.

45. Аснова прамой прызмы – прамавугольны трохвугольнік з перыметрам $2p$ і вострым вуглом α. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, калі вядома, што ў яе можна ўпісаць шар.

46. Шар упісаны ў прамую прызму, у аснове якой ляжыць прамавугольны трохвугольнік. У гэтым трохвугольніку перпендыкуляр, праведзены з вяршыні прамога вугла на гіпатэнузу, мае даўжыню h і ўтварае з адным з катэтаў вугал α. Знайдзіце аб'ём прызмы.

47. Каля шара апісана правільная трохвугольная прызма, а каля яе апісаны шар. Знайдзіце адносіны паверхняў гэтых шароў.

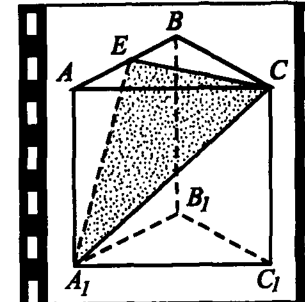
48. У правільную шасцівугольную прызму ўпісаны шар радыуса r. Знайдзіце аб'ём шара, апісанага каля гэтай прызмы.

49. У аснове прамой прызмы ляжыць прамавугольны трохвугольнік ABC, у якога $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, катэт $AC = b$. Дыяганаль бакавой грані прызмы, якая праходзіць праз гіпатэнузу AB, утварае з бакавой гранню, якая праходзіць праз катэт AC, вугал β. Знайдзіце аб'ём прызмы.

50. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік з вуглом α пры вяршыні. Дыяганаль грані, процілеглай дадзенаму вуглу, роўная a і ўтварае з плоскасцю асновы вугал β. Знайдзіце аб'ём прызмы.

1.3. Адказы і ўказанні

1. $2a^2\sin\alpha\sqrt{3-4\sin^2\alpha}$.



Рыс. 9

Указанне:

1) $A_1C = a$, $AE = BE$, $CE \perp ABA_1$, $\angle CA_1E = \alpha$ (рыс. 9);

2) ΔCEA_1, $\angle CEA_1 = 90°$, $CE = a\sin\alpha$;

3) ΔCEA, $\angle CEA = 90°$, $AE = CE\,\mathrm{ctg}\,60° = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}$, $AB = 2AE = \frac{2a\sin\alpha}{\sqrt{3}}$;

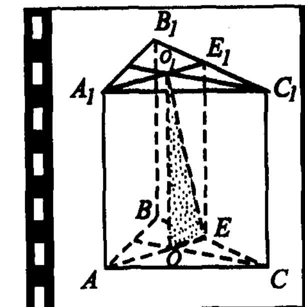
4) $P_{ABC} = 3AB = \frac{6a\sin\alpha}{\sqrt{3}}$;

5) ΔA_1C_1C, $CC_1 = \sqrt{A_1C^2 - A_1C_1^2} = \frac{a\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{\sqrt{3}}$;

6) $S_{бак} = P_{ABC}\cdot CC_1 = 2a^2\sin\alpha\sqrt{3-4\sin^2\alpha}$.

2. $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\varphi}$.

3. $6h^2$.



Рыс. 10

Указанне:

1) $OO_1 = h$, $\angle O_1EO = 60°$, O, O_1 – цэнтры роўнастаронніх трохвугольнікаў ABC и $A_1B_1C_1$ (рыс. 10);

2) ΔO_1OE, $OE = h\cdot\mathrm{ctg}\,60° = \frac{h}{\sqrt{3}}$, $AE = 3OE = h\sqrt{3}$;

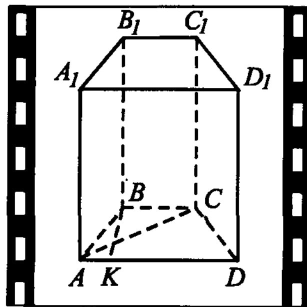
3) $AB = x$, ΔABE, $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$,

$h\sqrt{3} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}$. Адсюль $x = 2h$;

4) $S_{бак} = 3AB \cdot OO_1 = 6h^2$.

4. $6\sqrt{3}h^2 \operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\alpha + 1)$.

5. $4a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin\alpha$.



Рыс. 11

Указание:

1) $AB = CD = BC = a$,
$\angle BAD = \angle CDA = \alpha$,
$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = AC$,
$BK \perp AD$ (рыс. 11);

2) ΔAKB, $BK = a\sin\alpha$, $AK = a\cos\alpha$,
$AD = BC + 2AK = a + 2a\cos\alpha$;

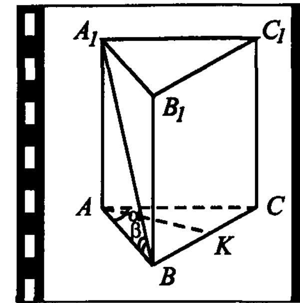
3) $S_{асн} = \frac{(AD + BC)BK}{2} = 2a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin\alpha$;

4) $ABCD$, $\angle B = \pi - \alpha$,
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B} = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$;

5) $V = S_{асн} \cdot AA_1 = 4a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin\alpha$.

6. $\frac{4R^2H}{\sin\alpha}$.

7. $\frac{b^3 \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{b^2 \operatorname{tg}\beta\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.



Рыс. 12

Указание:

1) $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$, $BC = b$,
$\angle A_1BA = \beta$, $BK = KC$ (рыс. 12);

2) ΔAKB, $AB = \frac{BK}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

3) ΔABC,
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{b^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4}$;

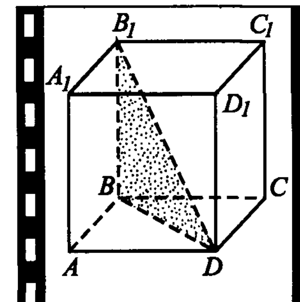
4) ΔA_1AB, $AA_1 = AB \operatorname{tg}\beta = \frac{b\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

5) $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{b^3 tg\beta \cos\frac{\alpha}{2}}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}}$;

6) $S_{бак} = (AB + AC + BC) \cdot AA_1 = \frac{b^2 \operatorname{tg}\beta\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

8. $\frac{H^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}$.

9. $4\sqrt{2}S \operatorname{ctg}\alpha$.



Рыс. 13

Указание:

1) $S_{ABCD} = S$, $\angle BB_1D = \alpha$ (рыс. 13);

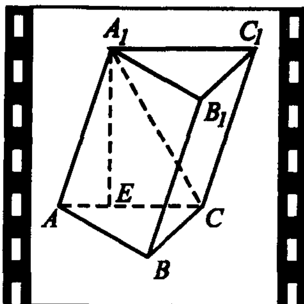
2) $ABCD$, $S = AD^2$, $AD = \sqrt{S}$,
$DB = \sqrt{2AD^2} = \sqrt{2S}$;

3) ΔB_1BD, $BB_1 = DB \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2S} \operatorname{ctg}\alpha$;

4) $S_{бак} = 4AB \cdot BB_1 = 4\sqrt{2}S \operatorname{ctg}\alpha$.

10. $\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sin 2\alpha \sin\alpha$.

11. $\frac{ac\sqrt{12a^2-3c^2}}{8}$.



Рыс. 14

Указание:

1) $AB = BC = AC = a$, $ABC \perp AA_1C_1C$, $AA_1 = A_1C_1$, $A_1C = c$, $A_1E \perp AC$, $\angle A_1AC = \alpha$ (рыс. 14);

2) ΔAA_1C, $\cos\alpha = \frac{AC^2 + AA_1^2 - A_1C^2}{2AC \cdot AA_1} = \frac{2a^2-c^2}{2a^2}$;

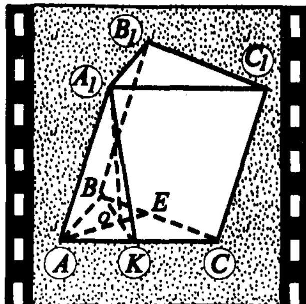
3) ΔA_1EA, $AE = AA_1\cos\alpha = a - \frac{c^2}{2a}$, $A_1E = \sqrt{AA_1^2 - AE^2} = c\sqrt{1-\frac{c^2}{4a^2}}$;

4) ΔABC, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

5) $V = S_{ABC} \cdot A_1E = \frac{ac\sqrt{12a^2-3c^2}}{8}$.

12. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + a^2$.

13. $\frac{a^2(\sqrt{6}+\sqrt{15})}{3}$.



Рыс. 15

Указание:

1) $BE = EC$, $AK = KC$, $A_1O \perp ABC$;

2) $A_1K \perp AC$, $\angle A_1AO = 45°$ (рыс. 15);

3) ΔAEC, $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AO = \frac{2AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

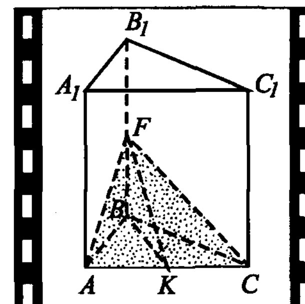
4) ΔAOA_1, $AO = OA_1$, $AA_1 = \sqrt{AO^2 + OA_1^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$;

5) ΔA_1OK, $A_1K = \sqrt{A_1O^2 + OK^2} = a\sqrt{\frac{5}{12}}$;

6) $S_{бак} = 2AC \cdot A_1K + BC \cdot BB_1 = a^2\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$.

14. $6\sqrt{3}b^3 \operatorname{tg}\beta$.

15. $48\sqrt{3}$ см³, $144 + 8\sqrt{3}$ см².



Рыс. 16

Указание:

1) $AK = KC$, $BF = FB_1$, $\angle BKF = 60°$, $S_{AFC} = 8\sqrt{3}$ (рыс. 16);

2) $AC = x$, ΔBKC, $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$;

3) ΔFBK, $\angle KFB = 30° \Rightarrow FK = 2BK = x\sqrt{3}$;

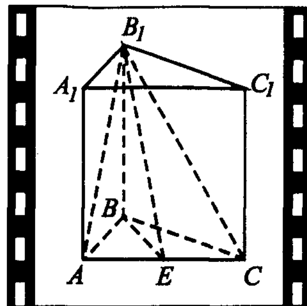
4) $S_{AFC} = \frac{AC \cdot FK}{2}$, $8\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$, $x = 4$;

5) $FK = 4\sqrt{3}$, $BK = 2\sqrt{3}$, $BF = \sqrt{FK^2 - BK^2} = 6$;

6) $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 48\sqrt{3}$, $S_{поўн} = 2S_{ABC} + 3S_{AA_1C_1C} = 8\sqrt{3} + 144$.

16. $3\sqrt{3}a^2$.

17. $\frac{2\sqrt[3]{V\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt[6]{3-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.



Рыс. 17

Указанне:

1) $\angle AB_1C = \alpha$, $AE = CE$, $AC = x$ (рыс. 17);

2) ΔB_1EC, $B_1C = \dfrac{EC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

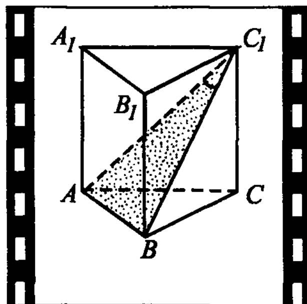
3) ΔB_1BC,

$$BB_1 = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \frac{x\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

4) $V = S_{ABC}\cdot BB_1 = \dfrac{x^3\sqrt{3 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{8\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt[3]{V\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt[6]{3 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

18. $\dfrac{p^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}{4\sin\frac{\beta}{2}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}$.

19. $\dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha}$.



Рыс. 18

Указанне:

1) $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $\angle AC_1B = \alpha$, $\angle ABC_1 = 90^\circ$ (рыс. 18);

2) ΔABC_1, $AB \perp BC_1$, $BC_1 = AB\operatorname{ctg}\alpha = a\operatorname{ctg}\alpha$;

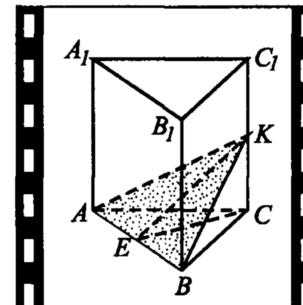
3) ΔBCC_1, $CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - BC^2} = \dfrac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$;

4) $S_{ABC} = \dfrac{AB\cdot BC}{2} = \dfrac{a^2}{2}$;

5) $V = S_{ABC}\cdot CC_1 = \dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

20. $\dfrac{a^3\sqrt{3 - 12\sin^2\frac{\beta}{2}}}{8\sin\frac{\beta}{2}}$.

21. $S\sqrt{1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha}$.



Рыс. 19

Указанне:

1) $S_{ABC} = S$, $\angle BA_1B_1 = \alpha$, $KC_1 = KC$, $AE = BE$ (рыс. 19);

2) ΔABC, $AB = x$,

$S = \dfrac{1}{2}x^2\sin 60^\circ = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$, $x = \sqrt{\dfrac{4S}{\sqrt{3}}}$,

$CE = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \sqrt{S\sqrt{3}}$;

3) ΔA_1B_1B,

$BB_1 = H = A_1B_1\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\dfrac{4S}{\sqrt{3}}}$;

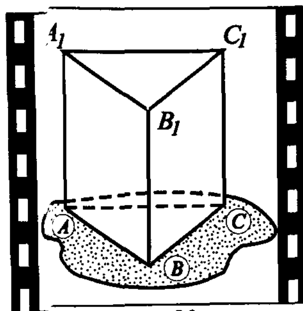
4) ΔKCE,

$KC = \dfrac{H}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{4S}{\sqrt{3}}}$, $KE = \sqrt{KC^2 + CE^2} = \dfrac{\sqrt{S\operatorname{tg}^2\alpha + 3S}}{\sqrt[4]{3}}$;

5) $S_{сяч} = \dfrac{AB\cdot KE}{2} = S\sqrt{1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha}$.

22. $\dfrac{p^2}{64}\sqrt{2\operatorname{tg}^2\varphi + 4}$.

23. $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см³.



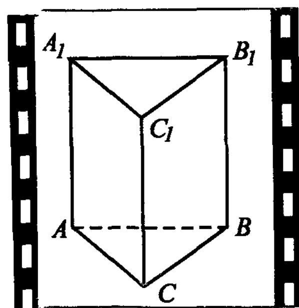
Рыс. 20

Указанне:

1) $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle ABC = 120°$, $S_{AA_1C_1C} = 35$ (рыс. 20);
2) ΔABC, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos 120°} = 7$;
3) $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1$, $35 = 7AA_1$, $AA_1 = 5$;
4) ΔABC, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin 120° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$;
5) $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$.

24. $\frac{a^3 \sin^2 \alpha}{8\cos\alpha(1 + \cos\alpha)}$.

25. 36 см².



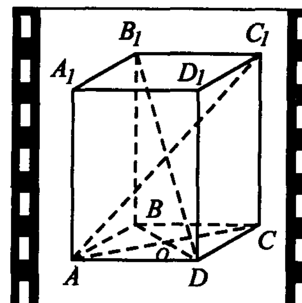
Рыс. 21

Указанне:

1) $AC = 4$, $CB = 3$, $\angle ACB = 90°$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 2$ (рыс. 21);
2) ΔABC, $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 5$, $S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = 6$;
3) $S_{бак} = P_{асн} \cdot AA_1 = 24$;
4) $S_{поўн} = S_{бак} + 2S_{ABC} = 36$.

26 $\frac{Q}{2}\sqrt{S \sin 2\varphi}$.

27. $\frac{H^3}{2}\sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$.



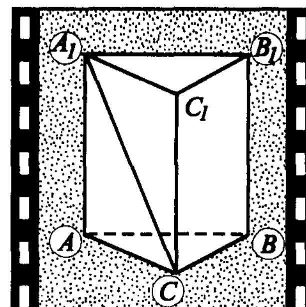
Рыс. 22

Указанне:

1) $\angle B_1DB = \beta$, $\angle C_1AC = \alpha$, $\angle BOA = \gamma$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = H$ (рыс. 22);
2) ΔB_1BD, $BD = BB_1 \operatorname{ctg}\beta = H \operatorname{ctg}\beta$;
3) ΔC_1CA, $AC = CC_1 \operatorname{ctg}\alpha = H \operatorname{ctg} a$;
4) $S_{асн} = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\gamma = \frac{H^2}{2}\sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$;
5) $V = S_{асн} \cdot H = \frac{H^3}{2}\sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$.

28. $\frac{h^3 \operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2}}$.

29. 60 см².



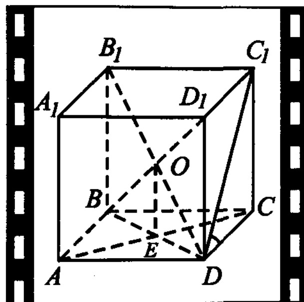
Рыс. 23

Указанне:

1) $BC = 3$, $\angle ACB = 90°$, $\angle A_1CA = 45°$, $AA_1 = 4$ (рыс. 23);
2) ΔA_1AC, $AA_1 = AC = 4$;
3) ΔABC, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$;
4) $S_{поўн} = 2\frac{AC \cdot CB}{2} + (AC + BC + AB)AA_1 = 60$.

30. $\frac{H^2}{\sqrt{3}}\left(4 + \sqrt{10}\right)$, H^3.

31. $\frac{8R^3 \operatorname{tg}\alpha}{\left(tg^2\alpha + 2\right)^2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}$.



Рыс. 24

Указанне:

1) $\angle C_1DC = \alpha$, O – цэнтр апісанага шара, $OD = R$, $BE = ED$, $DC = x$ (рыс. 24);

2) ΔABD, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = x\sqrt{2}$, $ED = \frac{BD}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}}$;

3) ΔC_1CD, $CC_1 = DC\operatorname{tg}\alpha = x\operatorname{tg}\alpha$, $OE = \frac{CC_1}{2} = \frac{x\operatorname{tg}\alpha}{2}$;

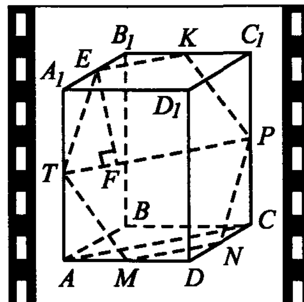
4) ΔOED, $OD^2 = OE^2 + ED^2$, $R^2 = \frac{x^2\operatorname{tg}^2\alpha}{4} + \frac{x^2}{2}$;

5) $x = \frac{2R}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}}$, $DC = \frac{2R}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}}$, $CC_1 = \frac{2R\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}}$;

6) $V = AD \cdot DC \cdot CC_1 = \frac{8R^3\operatorname{tg}\alpha}{\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

32. $\frac{3\sqrt{3}}{16}H\left(4R^2 - H^2\right)$.

33. $\frac{9a^2}{4}$.



Рыс. 25

Указанне:

1) $DC = a$, $CC_1 = 2a$, M, N, P, K, E, T – сярэдзіны адпаведных кантаў, $EF \perp PT$ (рыс. 25);

2) ΔADC, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$, $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

3) $TEKP$, $PT = a\sqrt{2}$, $EK = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $TF = \frac{PT - EK}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$;

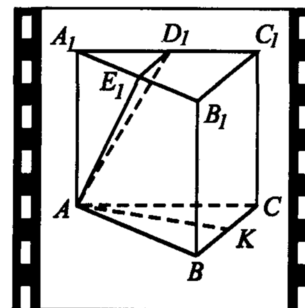
4) ΔABB_1, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = a\sqrt{5}$, $TE = \frac{AB_1}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

5) ΔEFT, $EF = \sqrt{ET^2 - TF^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$;

6) $S_{сяч} = 2S_{TEKP} = 2\left(\frac{TP + EK}{2} \cdot EF\right) = \frac{9a^2}{4}$.

34. 3 дм ^{2}.

35. 1 : 11.



Рыс. 26

Указанне:

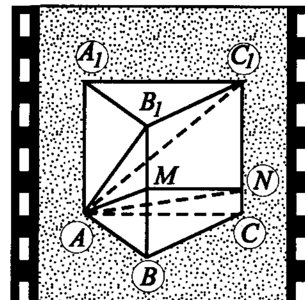
1) $A_1D_1 = D_1C_1$, $A_1E_1 = E_1B_1$, $BC = x$, $BC \perp AK$, $AK = h$, $CC_1 = H$, $V_1 = V_{A_1D_1E_1A}$, $V_2 = V_{E_1D_1C_1B_1ABC}$, $V = V_{ABCA_1B_1C_1}$ (рыс. 26);

2) $V = S_{ABC} \cdot CC_1 = \left(\frac{BC \cdot AK}{2}\right) \cdot CC_1 = \frac{xhH}{2}$;

3) $V_1 = \frac{1}{3}S_{A_1E_1D_1} \cdot AA_1 = \frac{xhH}{24}$;

4) $V_2 = V - V_1 = \frac{11}{24}xhH$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{11}$.

36. $\frac{7}{17}$.



Рыс. 27

Указанне:

1) $AC = 6$, $AA_1 = 8$, $B_1M = MB$, $\angle C_1AN = \angle NAC$, V – аб'ём прызмы;

2) $\frac{V_{ACBMN}}{V_{ACBB_1C_1}} = \frac{S_{BMNC}}{S_{BB_1C_1C}}$ (рыс. 27);

3) ΔACC_1, $AC_1 = \sqrt{CC_1^2 + AC^2} = 10$, $\frac{CN}{NC_1} = \frac{3}{5}$;

4) $S_{CBMN} = \frac{(BM + CN) \cdot BC}{2} = \frac{7BC}{2}$, $S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot BC = 8BC$,

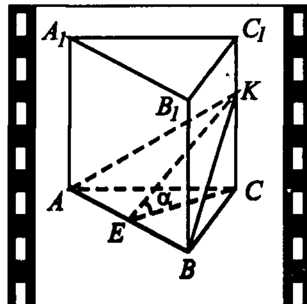
$S_{BMNC} : S_{BB_1C_1C} = 7 : 16$;

5) $V_{ACBMN} = \frac{7}{16} V_{ACBB_1C_1}$;

6) $V_{AA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} V \Rightarrow V_{ACBB_1C_1} = \frac{2}{3} V$, $V_{ACBMN} = \frac{7}{24} V$;

7) $V_{AA_1B_1C_1MN} = V - \frac{7}{24} V$, $V_{ACBMN} : V_{AA_1B_1C_1MN} = 7 : 17$.

37. $\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{V^2 \operatorname{tg}\alpha}}{\sin\alpha}$.



Рыс. 28

Указанне:

1) $AE = BE$, $\angle KEC = \alpha$, $BC = x$ (рыс. 28);

2) ΔABC, $EC = BC \sin 60° = \frac{x\sqrt{3}}{2}$,

$S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$;

3) ΔKCE, $CK = EC \operatorname{tg}\alpha = \frac{x\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2}$,

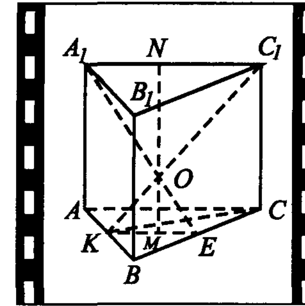
$KE = \frac{KC}{\sin\alpha} = \frac{x\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$;

4) $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot CK$, $V = \frac{x^3 \operatorname{tg}\alpha}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8V}{\operatorname{tg}\alpha}}$, $KE = \sqrt[3]{\frac{8V}{\operatorname{tg}\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$;

5) $S_{сяч} = \frac{1}{2} KE \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}\sqrt[3]{V^2 \operatorname{tg}\alpha}$.

38. $4\sqrt{3}$ см².

39. $\frac{4\sqrt{3}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.



Рыс. 29

Указанне:

1) $BC = 4$, $AK = KB$, $BE = EC$, $\angle KOE = \angle A_1OC_1 = \varphi$, $OM \perp KE$, $ON \perp A_1C_1$ (рыс. 29);

2) ΔABC, $KE = \frac{AC}{2} = 2$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 60° = 4\sqrt{3}$, $CK = 2\sqrt{3}$;

3) $KM = ME$, $A_1N = NC_1$;

4) $\Delta KOE \backsim \Delta A_1OC_1 \Rightarrow \frac{KO}{OC_1} = \frac{ME}{NC_1} \Rightarrow \frac{KO}{OC_1} = \frac{1}{2}$;

5) ΔKOM, $KO = \frac{KM}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, $OC_1 = 2OK = \frac{2}{\sin\frac{\varphi}{2}}$;

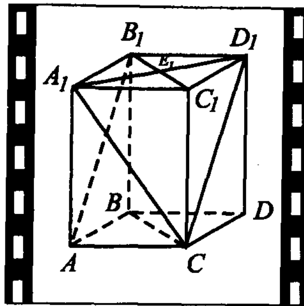
6) ΔC_1CK, $KC_1 = OK + OC_1 = \frac{3}{\sin\frac{\varphi}{2}}$,

$CC_1 = \sqrt{KC_1^2 - CK^2} = \frac{\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$;

7) $V = S_{ABC} \cdot CC_1 = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

40. $\frac{3a^3\sqrt{2\cos\alpha + 1}}{8\sin\frac{\alpha}{2}}$.

41. $8\sqrt{6}$.



Рыс. 30

Указанне:

1) $B_1D_1 \parallel A_1C_1$, $CD_1 \parallel AB_1 \Rightarrow$ $\angle A_1CD_1 = 90°$, $A_1C = CD_1$ (рыс. 30);

2) $\Delta A_1E_1C_1$, $A_1E_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - E_1C_1^2} = 2\sqrt{3}$, $A_1D_1 = 2A_1E_1 = 4\sqrt{3}$;

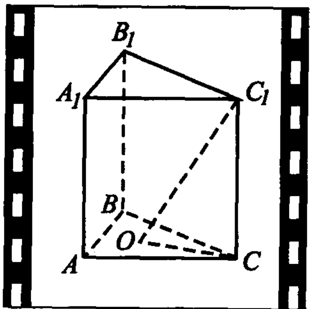
3) ΔA_1CD_1, $A_1D_1^2 = 2A_1C^2$, $A_1C = 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{6}$;

4) ΔA_1AC, $A_1A = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = 2\sqrt{2}$;

5) $S_{ABC} = A_1E_1 \cdot \frac{B_1C_1}{2} = 4\sqrt{3}$, $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = 8\sqrt{6}$.

42. Sh.

43. $S\,\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$.



Рыс. 31

Указанне:

1) $S_{ABC} = S$, O – цэнтр апісанай акружнасці, R – радыус, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle C_1OC = \varphi$, $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ (рыс. 31);

2) $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin(\alpha+\beta)$;

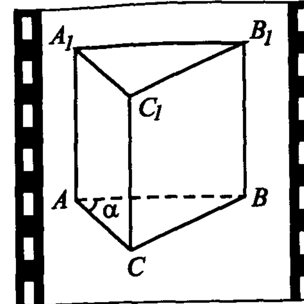
3) $S = \frac{abc}{4R} = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$, $R = \sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$;

4) ΔC_1CO, $CC_1 = R\,\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$;

5) $V = S\cdot CC_1 = S\,\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$.

44. $\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin\beta}$.

45. $\frac{4p^2\sin 2\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$.



Рыс. 32

Указанне:

1) $P_{ABC} = 2p$, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $BB_1 = 2r$, дзе r – радыус упісанага шара (рыс. 32);

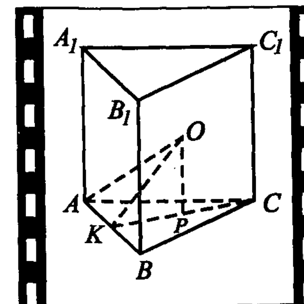
2) ΔABC, $CB = x\sin\alpha$, $AC = x\cos\alpha$, $2p = AC + CB + BA = x(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$, $x = \frac{2p}{1+\sin a+\cos\alpha}$;

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot CB = \frac{p^2\sin 2\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$, $r = \frac{S}{p} = \frac{p\sin 2\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$;

4) $BB_1 = 2r = \frac{2p\sin 2\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$, $S_{бак} = P_{ABC}\cdot BB_1 = \frac{4p^2\sin 2\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$.

46. $\frac{2h^3(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{\sin^2 2\alpha}$.

47. $\frac{1}{5}$.



Рыс. 33

Указанне:

1) $AK = KB$, O – цэнтр упісанага і апісанага шароў, $AO = R$ – радыус апісанага шара, P – цэнтр акружнасці, упісанай у ΔABC, $PK = r$ – яе радыус, $BC = a$, S_1, S_2 – плошчы паверхняў упісанага і апісанага шароў;

2) ΔCKB, $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

2. Зак. 3319.

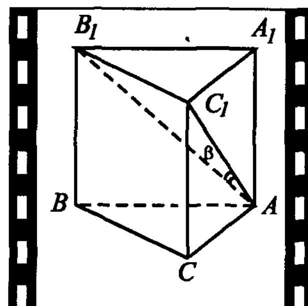
$r = PK = \frac{CK}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (рыс. 33);

3) ΔOPK, $OP = PK$, $OK = \sqrt{OP^2 + PK^2} = r\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$, $S_1 = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{3}$;

4) ΔOKA, $OA = R = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$, $S_2 = 4\pi R^2 = \frac{5\pi a^2}{3}$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{5}$.

48. $\frac{28\pi r^3\sqrt{21}}{27}$.

49. $\frac{b^3 \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{2\cos\alpha\sin\beta}$.



Рыс. 34

Указанне:

1) $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$ (рыс. 34);

2) AC_1 – артаганальная праекцыя AB_1 на грань AA_1C_1C, такім чынам, $\angle B_1AC_1 = \beta$;

3) ΔACB, $BC = AC \operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\alpha$;

4) ΔB_1C_1A ($\angle C_1 = 90°$, $B_1C_1 = BC = b\operatorname{tg}\alpha$), $AC_1 = B_1C_1 \operatorname{ctg}\beta = b\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$;

5) ΔC_1CA,

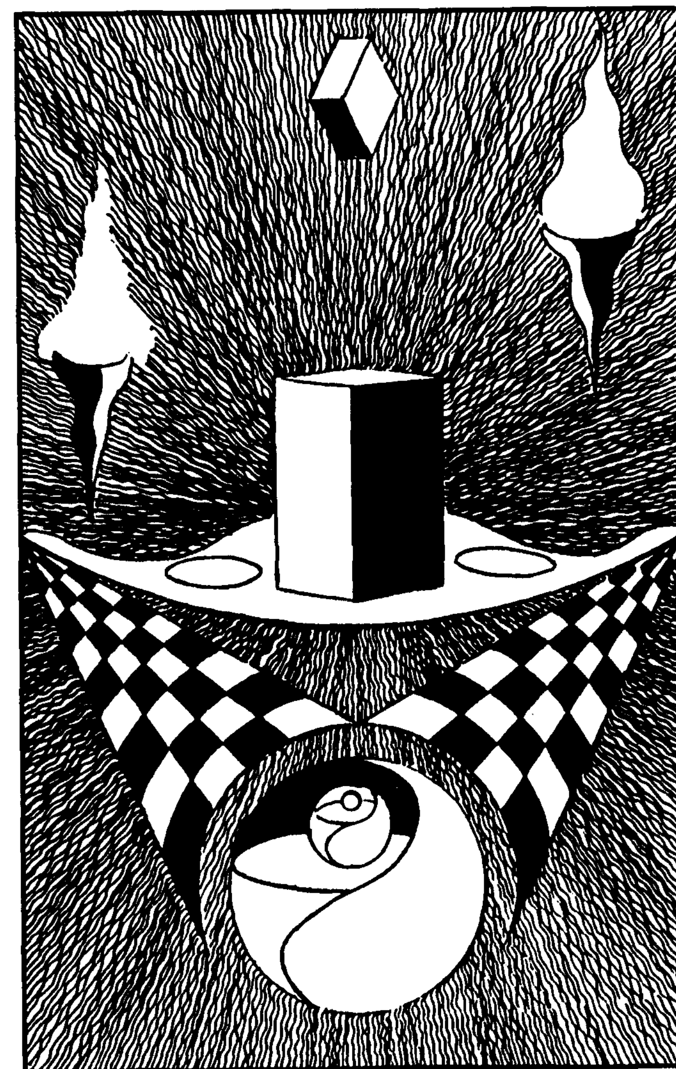
$$C_1C = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{b^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta - b^2} = \frac{b\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin\beta};$$

6) $V = S_{ABC}\cdot C_1C = \frac{b^3\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{2\cos\alpha\sin\beta}$.

50. $\frac{a^3}{8}\cos\beta\sin 2\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

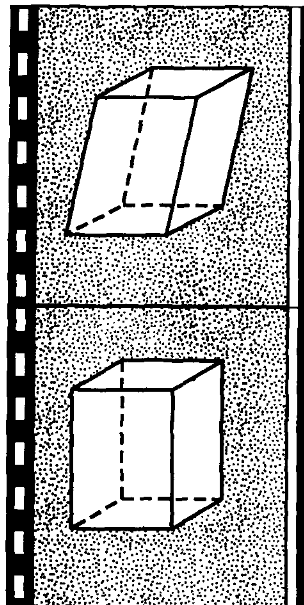
2

Паралелепіпед. Куб



2. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД. КУБ

2.1. Формулы, задачы


Рыс. 35

Паралелепіпедам называецца прызма, асновай якой з'яўляецца паралелаграм.

Паралелепіпед, бакавыя канты якога перпендыкулярныя асновам, называецца **прамым**.

Паралелепіпед называецца **нахіленым**, калі яго бакавыя канты не перпендыкулярныя асновам.

Прамы паралелепіпед, у якога аснова з'яўляецца прамавугольнікам, называецца **прамавугольным**.

1. Адвольны паралелепіпед (l – бакавы кант; P – перыметр асновы; $S_{асн}$ – плошча асновы; H – вышыня; $P_{сяч}$ – перыметр сячэння, перпендыкулярнага бакавым кантам; $S_{бак}$ – плошча бакавой паверхні; $S_{поўн}$ – плошча поўнай паверхні; V – аб'ём)

1) $S_{бак} = P_{сяч} l$;

2) $S_{поўн} = 2S_{асн} + S_{бак}$;

3) $V = S_{асн} \cdot H$.

2. Прамы паралелепіпед (l – бакавы кант; P – перыметр асновы)

$$S_{бак} = P \cdot l .$$

3. Прамавугольны паралелепіпед (a, b, c – вымярэнні паралелепіпеда; d – дыяганаль; P – перыметр асновы; H – вышыня; V – аб'ём)

1) $S_{бак} = PH$;

2) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$;

3) $V = abc$.

4. Куб (a – кант куба; d – дыяганаль; V – аб'ём)

1) $V = a^3$;

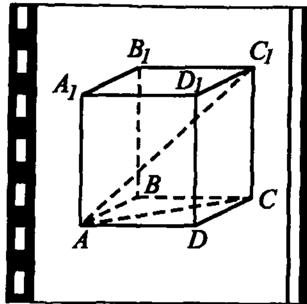
2) $d = a\sqrt{3}$.

5. Дыяганалі паралелепіпеда. Дыяганалі паралелепіпеда перасякаюцца ў адным пункце і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

6. Сфера, апісаная каля паралелепіпеда. Для таго, каб каля паралелепіпеда можна было апісаць сферу, неабходна і дастаткова, каб гэта быў прамавугольны паралелепіпед.

7. Сфера, упісаная ў паралелепіпед. Для таго, каб у паралелепіпед можна было ўпісаць сферу, неабходна і дастаткова, каб перпендыкулярнае сячэнне паралелепіпеда з'яўлялася ромбам і каб вышыня паралелепіпеда была роўная дыяметру акружнасці, упісанай у ромб.

Задача 1. У аснове прамога паралелепіпеда ляжыць паралелаграм са старанамі 1 см і 4 см і вострым вуглом $60°$. Большая дыяганаль паралелепіпеда роўная 5 см. Знайдзіце яго аб'ём.

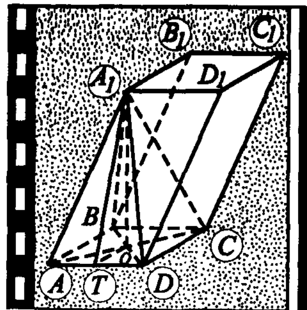


Рыс. 36

Рашэнне. Няхай $AB = 1 см$, $AD = 4 см$, $\angle BAD = 60°$, тады большая дыяганаль $AC_1 = 5 см$ (рыс. 36). Аб'ём паралелепіпеда $V = S_{асн} \cdot CC_1$. Плошча асновы $S_{асн} = AB \cdot AD \sin 60° = 2\sqrt{3}$ см^2. Вышыню CC_1 паралелепіпеда можна знайсці з прамавугольнага трохвугольніка ACC_1 ($\angle ACC_1 = 90°$, $AC_1 = 5 см$). Для гэтага дастаткова знайсці AC. Па тэарэме косінусаў $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos 120° = 21 см^2$.

У прамавугольным трохвугольніку ACC_1 катэт $CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = 2 см$. Значыць, $V = S_{асн} \cdot CC_1 = 4\sqrt{3}$ см^3.

Задача 2. Асновай паралелепіпеда служыць квадрат. Адна з вяршынь верхняй асновы аднолькава аддалена ад усіх вяршынь ніжняй асновы і знаходзіцца ад плоскасці гэтай асновы на адлегласці, роўнай b. Старана асновы роўная a. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда.



Рыс. 37

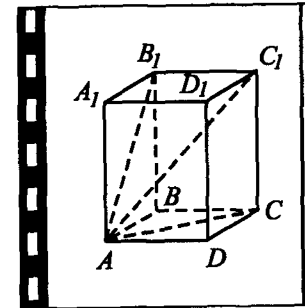
Рашэнне. Няхай пункт O – цэнтр асновы $ABCD$ дадзенага паралелепіпеда, а вяршыня A_1 аднолькава аддалена ад вяршынь квадрата $ABCD$. Тады адрэзак A_1O з'яўляецца вышынёй (таму што $A_1O \perp BD$ і $A_1O \perp AC$) паралелепіпеда (рыс. 37). Значыць, $A_1O = b$.

Плошча поўнай паверхні паралелепіпеда $S_{поўн} = 2S_{асн} + 4S_{AA_1D_1D}$. Няхай пункт T – сярэдзіна адрэзка AD, тады адрэзак A_1T з'яўляецца вышынёй паралелаграма AA_1D_1D (паколькі $AD \perp OT$ і $AD \perp A_1O$, то $AD \perp A_1T$).

У прамавугольным трохвугольніку TOA_1 гіпатэнуза $A_1T = \sqrt{A_1O^2 + OT^2} = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{2}$. Плошча $S_{AA_1D_1D} = AD \cdot A_1T = \frac{a\sqrt{4b^2 + a^2}}{2}$.

Такім чынам, $S_{поўн} = 2a(a + \sqrt{4b^2 + a^2})$.

Задача 3. Стораны асновы прамавугольнага паралелепіпеда роўныя a і b. Дыяганаль паралелепіпеда нахілена да бакавой грані, якая змяшчае старану асновы, роўную b, пад вуглом $30°$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

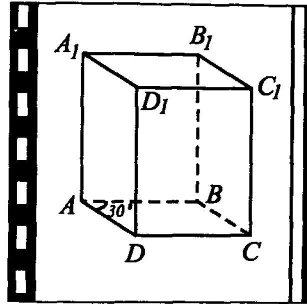


Рыс. 38

Рашэнне. Няхай $AD = a$, $AB = b$ стораны асновы паралелепіпеда (рыс. 38). Тады $\angle B_1AC_1 = 30°$ (таму што адрэзак AB_1 – артаганальная праекцыя дыяганалі AC_1 на грань AA_1B_1B, а вугал паміж AC_1 і гэтай гранню ёсць вугал паміж дыяганаллю AC_1 і яе артаганальнай праекцыяй на дадзеную грань). З прамавугольнага трохвугольніка AB_1C_1 ($\angle AB_1C_1 = 90°$, $\angle B_1AC_1 = 30°$, $B_1C_1 = a$) знаходзім $AC_1 = 2a$. У прамавугольным трохвугольніку ACC_1 ($\angle ACC_1 = 90°$, $AC_1 = 2a$, $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$) катэт $CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{3a^2 - b^2}$.

Такім чынам, аб'ём паралелепіпеда $V = S_{асн} \cdot CC_1 = ab\sqrt{3a^2 - b^2}$.

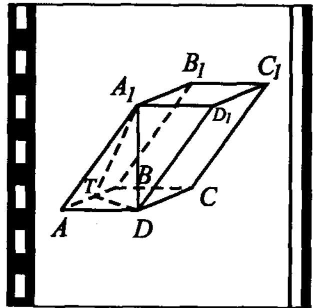
Задача 4. У прамым паралелепіпедзе стораны асновы роўныя a і b і ўтвараюць вугал $30°$. Плошча бакавой паверхні роўная S. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.



Рыс. 39

Рашэнне. Няхай $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = 30°$ (рыс. 39). Па ўмове задачы бакавая паверхня $S_{бак} = S = P_{асн} \cdot CC_1 = 2(a+b)CC_1$. Значыць, вышыня паралелепіпеда $CC_1 = \frac{S}{2(a+b)}$. Знойдзем плошчу асновы $S_{асн} = AB \cdot AD \sin 30° = \frac{ab}{2}$. Цяпер аб'ём паралелепіпеда $V = S_{асн} \cdot CC_1 = \frac{abS}{4(a+b)}$.

Задача 5. Асновай паралелепіпеда служыць ромб са старанoй a і вострым вуглом $30°$. Дыяганаль адной бакавой грані перпендыкулярная плоскасці асновы, а бакавы кант утварае з плоскасцю асновы вугал $60°$. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда і яго аб'ём.

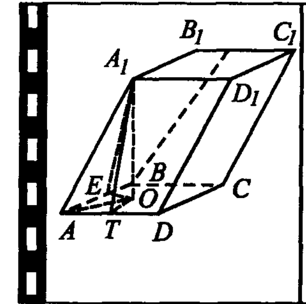


Рыс. 40

Рашэнне. Няхай $AB = AD = a$, $\angle BAD = 30°$ і дыяганаль A_1D бакавой грані перпендыкулярная плоскасці асновы (рыс. 40). Тады $\angle A_1AD = 60°$. Плошча асновы $S_{асн} = AB \cdot AD \sin 30° = \frac{a^2}{2}$.

У прамавугольным трохвугольніку ADA_1 ($\angle ADA_1 = 90°, \angle A_1AD = 60°$, $AD = a$) катэт $A_1D = AD \operatorname{tg} 60° = a\sqrt{3}$. Такім чынам, аб'ём паралелепіпеда $V = S_{асн} \cdot A_1D = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$. Плошча поўнай паверхні $S_{поўн} = 2S_{асн} + 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B}$. Плошча $S_{AA_1D_1D} = AD \cdot A_1D = a^2\sqrt{3}$. Няхай $DT \perp AB$, тады адрэзак A_1T – вышыня паралелаграма AA_1B_1B ($AB \perp DT$, $AB \perp A_1D$, значыць, AB перпендыкулярная плоскасці TDA_1). У прамавугольным трохвугольніку TDA_1 ($\angle TDA_1 = 90°$, $TD = \frac{a}{2}$, $A_1D = a\sqrt{3}$) гіпатэнуза $TA_1 = \sqrt{TD^2 + A_1D^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Такім чынам, $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot A_1T = \frac{a^2\sqrt{13}}{2}$. Канчаткова атрымліваем $S_{поўн} = a^2 + 2a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{13} = a^2(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13})$.

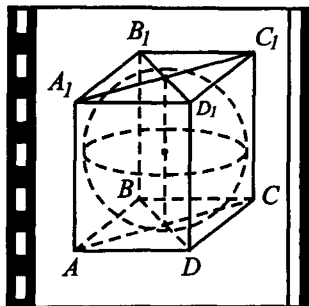
Задача 6. Асновай нахіленага паралелепіпеда служыць ромб $ABCD$ са старанoй, роўнай a, і вострым вуглом $60°$. Кант AA_1 таксама роўны a і ўтварае з кантамі AB і AD вуглы $45°$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.



Рыс. 41

Рашэнне. Аб'ём паралелепіпеда $V = S_{асн} \cdot H$. Плошча асновы $S_{асн} = AB \cdot AD \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Няхай A_1O – вышыня паралелепіпеда, $OT \perp AD$, $OE \perp AB$, тады $A_1T \perp AD$ і $A_1E \perp AB$. У прамавугольным трохвугольніку ATA_1 ($\angle ATA_1 = 90°$, $\angle A_1AT = 45°$, $AA_1 = a$) катэт $AT = TA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Аналагічна, $AE = EA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. З роўнасці трохвугольнікаў TOA_1 і EOA_1 ($\angle TOA_1 = \angle EOA_1 = 90°$, A_1O – агульная, $A_1T = A_1E$) вынікае, што $OT = OE$. Паколькі трохвугольнік ATO роўны трохвугольніку AEO (AO – агульная старана, $AT = AE$, $OT = OE$), то $\angle OAT = \angle OAE = 30°$. У трохвугольніку ATO ($\angle ATO = 90°$, $\angle OAT = 30°$, $AT = \frac{a}{\sqrt{2}}$) катэт $OT = AT \operatorname{tg} 30° = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Значыць, у прамавугольным трохвугольніку TOA_1 катэт $A_1O = \sqrt{TA_1^2 - OT^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Такім чынам, аб'ём $V = S_{асн} \cdot A_1O = \frac{a^3}{2}$ (рыс. 41).

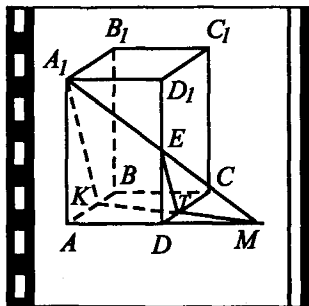
Задача 7. Каля сферы апісаны прамы паралелепіпед, у якога дыяганалі асновы роўныя a і b. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда.



Рыс. 42

Рашэнне. Няхай $AC = a$, $BD = b$ (рыс. 42). Па ўмове задачы ў прамы паралелепіпед упісана сфера, значыць, у яго аснову $ABCD$ можна ўпісаць акружнасць, дыяметр якой роўны вышыні AA_1 паралелепіпеда. Паколькі ў паралелаграм $ABCD$ упісваецца акружнасць, то $AB + CD = AD + BC$, або $2AB = 2AD$. Такім чынам, аснова паралелепіпеда – ромб. Няхай $AD = x$, тады $a^2 + b^2 = 4x^2$. Адсюль $x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Дыяметр упісанай у ромб $ABCD$ акружнасці роўны яго вышыні $h = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Значыць, плошча поўнай паверхні $S_{поўн} = 2S_{асн} + P_{ABCD} \cdot AA_1 = 2S_{асн} + P_{ABCD} \cdot h = ab + 2ab = 3ab$.

Задача 8. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з кантам даўжыней a, пункт K – сярэдзіна канта AB, пункт E – сярэдзіна канта DD_1. Знайдзіце, у якой адносіне дзеліць аб'ём куба плоскасць, якая праходзіць праз пункты K, E і A_1.



Рыс. 43

Рашэнне. Няхай $M = AD \cap A_1E$, $T = KM \cap DC$, $V_{MAKA_1} = V_1$, $V_{MDTE} = V_2$.

Тады $V_1 = \frac{AA_1 \cdot AK \cdot AM}{6} = \frac{a^3}{6}$,

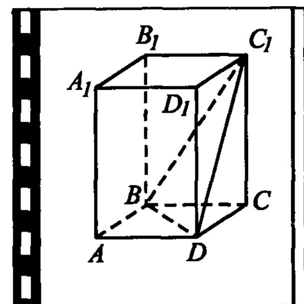
$V_2 = \frac{DE \cdot DT \cdot DM}{6} = \frac{a^3}{48}$,

$V_3 = V_{A_1AKEDT} = V_1 - V_2 = \frac{7a^3}{48}$,

$V_4 = V_{A_1B_1BKD_1C_1CT} = a^3 - \frac{7a^3}{48} = \frac{41a^3}{48}$.

Значыць, $V_3 : V_4 = 7 : 41$ (рыс. 43).

Задача 9. Плошчы бакавых граняў прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя S_1, S_2, S_3. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да плоскасці BDC_1.



Рыс. 44

Рашэнне. Шукаемая адлегласць d ёсць даўжыня вышыні H пірамiды $CBDC_1$, праведзенай з вяршыні C, г.зн. $d = H = \frac{3V_{CBDC_1}}{S_{BDC_1}}$. Няхай $S_{BDC_1} = S$. Паколькі плоскія вуглы пры вяршыні C пірамiды $CBDC_1$ прамыя, то

$$S^2 = \frac{S_1^2}{4} + \frac{S_2^2}{4} + \frac{S_3^2}{4}.$$

Адсюль знаходзім $S = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{2}$. Абазначым праз x, y, z даўжыні кантаў паралелепіпеда. Тады $xy = S_1$, $yz = S_2$, $xz = S_3$. Перамножыўшы пачленна гэтыя роўнасці, атрымліваем $(xyz)^2 = S_1S_2S_3$, або $xyz = \sqrt{S_1S_2S_3}$. Такім чынам, аб'ём паралелепіпеда роўны $\sqrt{S_1S_2S_3}$. Аб'ём пірамiды $CBDC_1$ роўны адной шостай аб'ёму паралелепіпеда, г.зн. $V_{CBDC_1} = \frac{1}{6}\sqrt{S_1S_2S_3}$. Цяпер адлегласць ад вяршыні C да плоскасці BDC_1 $d = H = \frac{\frac{3}{6}\sqrt{S_1S_2S_3}}{\frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} =$

$= \frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}$ (рыс. 44).

2.2. Задачы

1. Поўная паверхня прамавугольнага паралелепіпеда роўная 1098 $см^2$, а яго вымярэнні адносяцца як 3 : 4 : 7. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

2. Знайдзіце бакавую паверхню прамавугольнага паралелепіпеда, аб'ём якога роўны 4320 $см^2$, бакавы кант 18 см, а стораны асновы адносяцца як 3 : 5.

3. Меншая дыяганаль прамога паралелепіпеда роўная 19 см, дыяганаль меншай бакавой грані 16 см, большая старана асновы 15 см і востры вугал асновы роўны $60°$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

4. Поўная паверхня прамога паралелепіпеда роўная 896 $см^2$, а бакавая – 672 $см^2$. Меншая з дыяганалей асновы роўная $8\sqrt{2}$ см, а вугал паміж ёю і большай стараной асновы роўны $45°$. Знайдзіце меншую дыяганаль паралелепіпеда.

5. Знайдзіце аб'ём прамога паралелепіпеда, дыяганалі якога роўныя 14 см і $4\sqrt{10}$ см, а дыяганалі бакавых граняў – 13 см і $3\sqrt{17}$ см.

6. Асновай прамога паралелепіпеда служыць паралелаграм, стораны якога роўныя 6 см і 10 см, а меншая дыяганаль яго перпендыкулярная меншай старане. Большая дыяганаль паралелепіпеда роўная 17 см. Знайдзіце аб'ём і поўную паверхню паралелепіпеда.

7. Знайдзіце стораны асновы прамога паралелепіпеда, аб'ём якога роўны 3360 $см^3$, поўная паверхня роўная 1416 $см^2$, бакавая паверхня – 1080 $см^2$, а большая дыяганаль паралелепіпеда – 29 см.

8. Знайдзіце дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда, калі перыметр яго асновы роўны 16 см, поўная паверхня роўная 168 $см^2$, аб'ём роўны 108 $см^3$.

9. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дыяганалі асновы AC і BD перасякаюцца ў пункце M, $\angle AMB = \alpha$. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні паралелепіпеда, калі $B_1M = b$, $\angle BMB_1 = \beta$.

10. Дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда нахілена да плоскасці асновы пад вуглом φ, яе даўжыня роўная l, востры вугал паміж дыяганалямі асновы роўны β. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

11. Асновай прамога паралелепіпеда з'яўляецца ромб са стараной a і вострым вуглом α. Меншая дыяганаль паралелепіпеда ўтварае з асновай вугал β. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

12. Аснова прамога паралелепіпеда – ромб з вострым вуглом α і большай дыяганаллю m. Меншая дыяганаль паралелепіпеда нахілена да плоскасці асновы пад вуглом β. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

13. Дыяганалі бакавых граняў прамавугольнага паралелепіпеда ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы α і β. Знайдзіце вугал паміж дыяганаллю паралелепіпеда і плоскасцю асновы.

14. Дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда роўная $10\sqrt{2}$ см і ўтварае з плоскасцю асновы вугал $45°$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі адна старана асновы большая за другую на 2 см.

15. Дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда ўтварае з плоскасцю асновы вугал α, а з большай бакавой гранню – вугал β. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі плошча яго асновы роўная S.

16. Асновай прамога паралелепіпеда служыць ромб. Адна з дыяганалей паралелепіпеда роўная a і ўтварае з плоскасцю асновы вугал α, а з адной з бакавых граняў – вугал β. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

17. Дыяганалі сумежных бакавых граняў прамавугольнага паралелепіпеда роўныя 5 см і $20\sqrt{2}$ см і нахілены да плоскасці асновы пад вугламі, рознасць якіх роўная $45°$. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні паралелепіпеда.

18. Дыяганалі бакавых граняў прамавугольнага паралелепіпеда нахілены да плоскасці яго асновы пад вуглом у $30°$ і $60°$, а дыяганаль асновы роўная $\sqrt{30}$ см. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

19. У прамавугольным паралелепіпедзе пункт перасячэння дыяганалей ніжняй асновы злучаны з сярэдзінай бакавога канта адрэзкам даўжыней m. Гэты адрэзак утварае з асновай паралелепіпеда вугал α і з бакавой гранню вугал 2α. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

20. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні і аб'ём прамога паралелепіпеда, калі вядома, што яго вышыня роўная h, дыяганалі яго ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы α і β, а яго асновай служыць ромб.

21. Асновай прамога паралелепіпеда служыць ромб з вострым вуглом 2β, даўжыня вышыні якога роўная h. Адна з дыяганалей паралелепіпеда ўтварае з адной з бакавых граняў вугал φ. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

22. Аснова прамога паралелепіпеда – ромб з вострым вуглом φ і меншай дыяганаллю d. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі большая дыяганаль яго ўтварае з плоскасцю бакавой грані вугал α.

23. Дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда мае даўжыню d і ўтварае з дзвюма сумежнымі бакавымі гранямі аднолькавыя вуглы, велічыня якіх роўная α. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

24. Знайдзіце аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда, у якім дыяганалі бакавых граняў, якія выходзяць з адной вяршыні, роўныя 4 см і 5 см і ўтвараюць вугал у $60°$.

25. У прамавугольным паралелепіпедзе адзін з кантаў асновы мае даўжыню a і ўтварае вугал α з дыяганаллю паралелепіпеда і β з дыяганаллю асновы паралелепіпеда. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

26. У прамым паралелепіпедзе бакавы кант роўны 12 см, большая старана асновы роўная 7 см, большая дыяганаль асновы 9 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні паралелепіпеда, калі яго большая дыяганаль утварае з большай стараной асновы вугал у $60°$.

27. Дыяганалі дзвюх сумежных бакавых граняў прамавугольнага паралелепіпеда, якія не перасякаюцца, нахілены да плоскасці яго асновы пад вугламі α і β. Знайдзіце вугал паміж гэтымі дыяганалямі.

28. Дыяганалі AC_1 і B_1D прамога паралелепіпеда з асновай $ABCD$ узаемна перпендыкулярныя і роўныя 3 дм і 4 дм. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі яго бакавы кант роўны 19,2 см.

29. Аснова прамога паралелепіпеда – ромб, у якога меншая дыяганаль роўная d і востры вугал роўны α. Плошча бакавой паверхні роўная S. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

30. У прамым паралелепіпедзе асновай служыць ромб, востры вугал якога α; меншая дыяганаль ромба роўная d; вышыня паралелепіпеда роўная $\frac{d}{2}$. Знайдзіце плошчу паверхні паралелепіпеда.

31. Асновай прамога паралелепіпеда служыць паралелаграм са старанамі a, b і вуглом паміж імі ў $30°$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі яго бакавая паверхня роўная S.

32. Стораны асновы прамога паралелепіпеда роўныя 13 см і 14 см, меншая яго дыяганаль 17 см, плошча асновы 168 см^2. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні.

33. У аснове прамога паралелепіпеда ляжыць паралелаграм з тупым вуглом α і старанамі a і b. Меншая дыяганаль паралелепіпеда роўная большай дыяганалі асновы. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

34. Аснова прамавугольнага паралелепіпеда ўпісана ў круг радыуса R. Адна са старон асновы сцягвае дугу акружнасці велічыней 2α. Знайдзіце аб'ём гэтага паралелепіпеда, калі вядома, што плошча яго бакавой паверхні S.

35. У прамавугольным паралелепіпедзе перыметр асновы роўны 28 см, перыметр меншай бакавой грані 30 см, а плошча поўнай паверхні роўная 348 $см^2$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

36. Знайдзіце аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда, у якога плошчы дзвюх бакавых сумежных граняў роўныя 90 $см^2$ і 135 $см^2$, а перыметр асновы роўны 30 см.

37. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, старана якога роўная a, праведзены два сячэнні: адно – праз вяршыні D, A_1 і C_1, другое – праз вяршыні A, B_1 і D_1. Знайдзіце даўжыню адрэзка, па якім гэтыя сячэнні перасякаюцца.

38. Дадзен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, кант якога роўны 1. Знайдзіце адлегласць паміж плоскасцямі, адна з якіх праходзіць праз вяршыні A, B_1, D_1, а другая – праз вяршыні B, C_1, D куба.

39. Дакажыце, што квадрат дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўны паўсуме квадратаў трох дыяганалей граняў, якія выходзяць з адной вяршыні.

40. Дакажыце, што дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда роўная суме праекцый трох яго вымярэнняў на дыяганаль паралелепіпеда.

41. Дакажыце, што ў прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ квадрат плошчы сячэння A_1BD у 8 разоў меншы за суму квадратаў плошчаў граняў.

42. Дакажыце, што сума квадратаў плошчаў бакавых граняў прамога паралелепіпеда роўная суме квадратаў плошчаў яго дыяганальных сячэнняў.

43. Знайдзіце бакавую паверхню і плошчы дыяганальных сячэнняў прамога паралелепіпеда, дыяганалі якога роўныя 15 см і $\sqrt{313}$ см, а дыяганалі бакавых граняў 13 см і $2\sqrt{61}$ см.

44. Дыяганалі прамога паралелепіпеда роўныя 16 см і 30 см, а вугал, які ўтвораны імі і заключае меншую старану асновы, роўны $60°$. Бакавы кант паралелепіпеда меншы за большую старану асновы на 17 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні.

45. У прамым паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з вяршыні тупога вугла B_1 праведзены перпендыкуляры B_1E да стараны AD і B_1F да стараны CD. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда, калі $BB_1 = 8$ см, $B_1E = \sqrt{89}$ см, $B_1F = 10$ см і $EF = 5$ см.

46. Стораны асновы прамога паралелепіпеда роўныя 4 дм і 6 дм, а меншая з дыяганалей асновы дзеліць вугал паралелаграма ў адносіне 1 : 2. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні паралелепіпеда, калі меншая дыяганаль яго роўная 13 дм.

47. У аснове прамога паралелепіпеда ляжыць ромб, плошча якога роўная 60 $см^2$. Плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда роўныя 72 $см^2$ і 60 $см^2$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

48. Асновай прамога паралелепіпеда служыць ромб. Плошчы дыяганальных сячэнняў роўныя S_1 і S_2. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні паралелепіпеда.

49. Стораны асновы прамавугольнага паралелепіпеда адносяцца як $m : n$, а дыяганальнае сячэнне – квадрат з плошчай Q. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

50. У прамавугольным паралелепіпедзе дыяганаль асновы d, вугал паміж дыяганалямі асновы α, а вугал, утвораны дыяганальнай плоскасцю, праведзенай праз большую старану асновы, з плоскасцю асновы, роўны β. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

51. Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў прамога паралелепіпеда, стораны асновы якога роўныя 63 см і 66 см, бакавы кант роўны 100 см, адносіна дыяганалей паралелепіпеда 25 : 29.

52. Знайдзіце плошчу дыяганальнага сячэння прамавугольнага паралелепіпеда, перыметр асновы якога роўны 84 см, а пункт перасячэння дыяганалей сячэння аддалены ад старон асновы паралелепіпеда на 15 см і $12\sqrt{2}$ см.

53. Дадзен прамавугольны паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у аснове якога ляжыць квадрат $ABCD$ са стараной, даўжыня якой 3 см, бакавыя канты AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 маюць даўжыню 5 см. Роўнастаронні трохвугольнік размешчаны ў прасторы так, што адна яго вяршыня супадае з вяршыняй C паралелепіпеда, а дзве другія размешчаны на прамых BB_1 і C_1D_1 адпаведна. Знайдзіце даўжыню медыяны гэтага трохвугольніка.

54. Дадзен прамавугольны паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якога AB = 30 см, AD = 24 см. У паралелепіпедзе праведзены адрэзак EF, дзе E – сярэдзіна AD, а F – сярэдзіна A_1B_1, і на адрэзку EF выбраны пункт M так, што $EM : MF = 3 : 5$. Праз вяршыню A і пункт M праведзена прамая, якая перасякае плоскасць асновы $A_1B_1C_1D_1$ у пункце K. Знайдзіце адлегласць B_1K.

55. Асновай нахіленага паралелепіпеда з'яўляецца паралелаграм, стораны якога роўныя 7 см і 9 см, а адна з дыяганалей роўная 14 см. Вяршыня аднаго з тупых вуглоў верхняй асновы праецыруецца ў пункт перасячэння дыяганалей ніжняй асновы. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі бакавы кант яго роўны 6 см.

56. Бакавы кант паралелепіпеда нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60°. Сячэнне паралелепіпеда, якое праходзіць праз меншую дыяганаль асновы, з'яўляецца прамавугольнікам, дыяганаль якога роўная 29 см. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі стораны паралелаграма, які ляжыць у аснове, роўныя 15 см і 24 см, а вугал паміж імі роўны 60°.

57. Аснова нахіленага паралелепіпеда – квадрат, старана якога роўная a. Бакавы кант роўны b і ўтварае з кожнай з прылеглых старон асновы вугал α. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

58. Аснова нахіленага паралелепіпеда – прамавугольнік з даўжынямі старон 5 см і 12 см. Бакавы кант роўны дыяганалі асновы і ўтварае з плоскасцю асновы вугал 30°. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

59. Грані паралелепіпеда – ромбы, якія роўныя паміж сабою. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі старана ромба роўная a і яго востры вугал роўны α.

60. Асновы паралелепіпеда – квадраты са стараной b, а ўсе бакавыя грані – ромбы. Адна з вяршынь верхняй асновы аднолькава аддалена ад усіх вяршынь ніжняй асновы. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

61. У правільную чатырохвугольную піраміду $SABCD$ упісаны куб. Усе чатыры вяршыні адной грані куба ляжаць на аснове $ABCD$ піраміды. Усе чатыры вяршыні процілеглай грані куба ляжаць на апафемах бакавых граняў піраміды. Усе канты піраміды роўныя a. Знайдзіце аб'ём куба.

62. У правільную чатырохвугольную піраміду $SABCD$ упісаны куб. Усе чатыры вяршыні адной з граняў куба ляжаць на аснове $ABCD$ піраміды. Вяршыні процілеглай грані куба ляжаць на бакавых кантах піраміды. Усе канты піраміды роўныя a. Знайдзіце аб'ём куба.

63. Адна з вяршынь куба і цэнтры яго граняў, якія не змяшчаюць гэту вяршыню, з'яўляюцца вяршынямі піраміды. Знайдзіце яе аб'ём, калі старана куба роўная 3.

64. Цэнтр верхняй асновы куба злучаны з сярэдзінамі старон ніжняй асновы. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні атрыманай піраміды, калі даўжыня канта куба роўная a.

65. З мноства прамавугольных паралелепіпедаў, перыметр асновы якіх роўны 24 см, а перыметр адной з бакавых граняў 36 см, знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, які мае найменшую дыяганаль.

66. З мноства прамавугольных паралелепіпедаў, перыметры дзвюх бакавых граняў якога роўныя 16 см і 24 см, знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, які мае найбольшую бакавую паверхню.

67. З мноства прамавугольных паралелепіпедаў, стораны асноў якіх адносяцца як 3 : 5, а перыметр меншай бакавой грані роўны 36 см, знайдзіце бакавую паверхню паралелепіпеда, які мае найбольшы аб'ём.

68. З мноства прамавугольных паралелепіпедаў, стораны асноў якіх адносяцца як 2 : 3, а перыметр большай бакавой грані роўны 24 см, знайдзіце аб'ём таго паралелепіпеда, які мае найбольшую: а) плошчу бакавой паверхні; б) плошчу поўнай паверхні.

69. У шар упісаны прамавугольны паралелепіпед з найбольшай бакавой паверхняй, перыметр асновы якога роўны 16 см. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, калі дыяметр шара роўны 9 см.

70. З мноства паралелепіпедаў, перыметры бакавых граняў якіх роўныя 12 см і 18 см, знайдзіце аб'ём таго паралелепіпеда, каля якога можна апісаць шар найменшага радыуса.

71. У шар упісаны прамавугольны паралелепіпед. Дыяганалі дзвюх бакавых граняў паралелепіпеда, якія выходзяць з адной вяршыні, роўныя 16 см і 21 см, а вугал паміж імі $60°$. Знайдзіце плошчу паверхні шара.

72. У паўшар радыуса $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$ упісаны куб, пры гэтым чатыры вяршыні яго ляжаць на аснове паўшара, а іншыя чатыры вяршыні размешчаны на сферычнай паверхні. Знайдзіце аб'ём куба.

73. Дадзены куб с асновамі $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, пры гэтым $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. У вугал A куба ўпісаны шар радыуса $\frac{1}{2}$. Знайдзіце радыус шара, упісанага ў вугал C куба, які датыкаецца знешне да дадзенага шара, калі вядома, што кант куба роўны $\frac{3}{2}$.

74. Унутры куба з кантам a размешчаны два роўныя шары, якія датыкаюцца паміж сабой. Пры гэтым адзін шар датыкаецца да трох граняў куба, якія маюць агульную вяршыню, а другі датыкаецца да трох астатніх граняў куба. Знайдзіце радыусы гэтых шароў.

75. Кант куба роўны a. Знайдзіце паверхню шара, які дзеліць кожны кант куба на тры роўныя часткі.

76. Куб і шар маюць агульны цэнтр. Знайдзіце аб'ём і поўную паверхню той часткі шара, якая знаходзіцца ўнутры куба, калі кант куба роўны 8 см, а радыус шара роўны 5 см.

77. У куб са стараной a упісаны шар. Знайдзіце радыус другога шара, які датыкаецца да трох граняў куба і да першага шара.

78. У куб с кантам a упісаны шар. Праз сярэдзіны двух сумежных кантаў куба праведзена плоскасць, якая датыкаецца да шара. Знайдзіце плошчу сячэння куба гэтай плоскасцю.

79. Аснова прамога паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб са стараной a і вострым вуглом α. Меншая дыяганаль паралелепіпеда ўтварае з асновай вугал β. Знайдзіце плошчу сячэння ACB_1.

80. Дадзен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, кант якога роўны a. Праз дыяганаль AC яго грані $ABCD$ праведзена плоскасць паралельна прамой BO_1, дзе O_1 – цэнтр грані $A_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце плошчу ўтворанага сячэння.

81. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з кантам a пункт K – цэнтр грані $A_1B_1C_1D_1$, пункт L – цэнтр грані ADD_1A_1. Знайдзіце перыметр трохвугольніка CKL.

82. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з кантам a пункт M – сярэдзіна канта BC, пункт N – сярэдзіна канта C_1D_1, пункт P – сярэдзіна канта AA_1. Знайдзіце перыметр трохвугольніка MNP.

83. Праз дыяганаль AC квадрата, які ляжыць у аснове прамога паралелепіпеда праведзена плоскасць так, што ў сячэнні атрымаўся трохвугольнік ABC з вуглом пры вяршыні B у два разы большым, чым вугал паміж плоскасцю сячэння і асновай паралелепіпеда. Знайдзіце вугал ABC.

84. Дадзен прамавугольны паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якога $AB = 12$ см, $BC = 20$ см і $AA_1 = 16$ см. Знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда, якое праходзіць праз вяршыню C перпендыкулярна дыяганалі DC_1.

85. Дадзен прамавугольны паралелепіпед з квадратнай асновай. У сячэнні паралелепіпеда плоскасцю атрымліваецца ромб. Знайдзіце ўнутраныя вуглы ромба, калі двухгранны вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы роўны $30°$.

86. Дадзен прамавугольны паралелепіпед з квадратнай асновай. У сячэнні паралелепіпеда плоскасцю атрымліваецца ромб з вострым вуглом $60°$. Пад якім вуглом перасякае плоскасць сячэння бакавыя канты паралелепіпеда?

87. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункт M – сярэдзіна канта C_1D_1, пункт N выбраны на канце AB так, што $AN = 2NB$. Праз вяршыню D і пункты M і N праведзена плоскасць α. Знайдзіце велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцю α і плоскасцю грані ABC куба.

88. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ праз вяршыню B і сярэдзіны M і N кантаў AD і CC_1 праведзена плоскасць. Знайдзіце вугал нахілу гэтай плоскасці да плоскасці грані $ABCD$.

89. Дадзен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пункт P ляжыць на канце CC_1, прычым $C_1P = 2CP$. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі BD_1P і ABC.

90. Дадзен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі BCB_1 і BC_1M, дзе M – сярэдзіна канта AD.

91. Кант куба роўны a. Знайдзіце адлегласць паміж дыяганаллю куба і дыяганаллю грані, якая не перасякае яе.

92. Дадзен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Праз дыяганаль куба з канцом у вяршыне B і сярэдзіну канта AD праведзена плоскасць; адлегласць ад пункта D да праведзенай плоскасці роўная h. Знайдзіце даўжыню канта куба.

93. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$ см, $AD = 6$ см, $AA_1 = 8$ см. Пункт K – сярэдзіна канта AA_1, пункт L ляжыць на канце DD_1, прычым $DL = 2$ см, а пункт M належыць адрэзку B_1C і $MC = 2B_1M$. Знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункты K, L, M.

94. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 = 8$ см, $AB = 10$ см, $AD = 12$ см. Пункт K – цэнтр грані AA_1B_1B, пункт L належыць канту BB_1 і $BL = 3$ см, пункт M дзеліць кант DC_1 у адносіне 7 : 3, лічачы ад D. Знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункты K, L, M.

95. На кантах AD і C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ узяты адпаведна пункты P і Q – сярэдзіны гэтых кантаў – і праз пункты C, P і Q праведзена плоскасць. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі CPQ і ABC.

96. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункт M ляжыць на канце AA_1, прычым $AM : MA_1 = 3 : 1$, а пункт K ляжыць на канце CC_1 і $CK = MA_1$. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі DMB і DKB.

97. Вышыня прамога паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у два разы меншая за старану ромба, які ляжыць у яго аснове, а вугал BAD гэтага ромба роўны $30°$. Сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз старану AD, утварае з асновай вугал, роўны $60°$. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда і плошчу атрыманага сячэння, калі вышыня паралелепіпеда роўная a.

98. На канце CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ узяты пункт P – сярэдзіна гэтага канта. Сячэнне куба плоскасцю праходзіць праз вяршыню B_1 перпендыкулярна прамой A_1P. Знайдзіце плошчу атрыманага сячэння, калі кант куба роўны a.

99. У прамым паралелепіпедзе стораны асноў роўныя a і $2a$, вугал паміж імі – $60°$. Знайдзіце яго дыяганалі, калі меншая з іх складае з асновай вугал у $45°$.

100. У прамым паралелепіпедзе стораны роўныя 17 см і 18 см, адна з дыяганалей асновы роўная 25 см. Большая дыяганаль паралелепіпеда ўтварае з асновай вугал у $45°$. Знайдзіце плошчу яго дыяганальных сячэнняў.

2.3. Адказы і ўказанні

1. 2268 см^3.

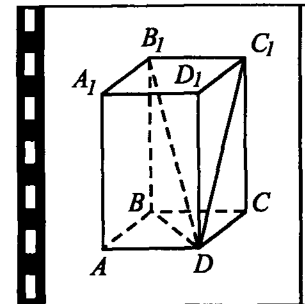


Рис. 45

Указанне:

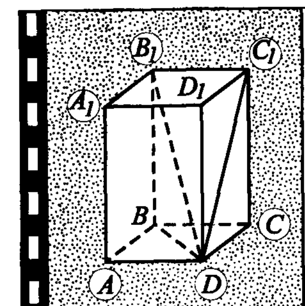
1) $ABCD$ – прамавугольнік, $S_{пав} = 1098$ см^2, $AB : AD : AA_1 = 3 : 4 : 7$ (рыс. 45);

2) $AB = 3x$, $AD = 4x$, $AA_1 = 7x$, $S_{пав} = 2S_{асн} + S_{бак} = 2AB \cdot AD + 2(AB + AD)AA_1$, $1098 = 24x^2 + 98x^2$ $\Rightarrow$ $x = 3$ см, $AB = 9$ см, $AD = 12$ см, $AA_1 = 21$ см;

3) $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2268$ см^3.

2. 1152 см^2.

3. 1140 см^3.



Рыс. 46

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $\angle BAD = 60°$, $B_1D = 19$ см, $DC_1 = 16$ см, $AD = 15$ см, $CC_1 = x$ (рыс. 46);

2) ΔB_1BD, $BD^2 = B_1D^2 - B_1B^2 = 361 - x^2$;

3) ΔABD, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle BAD$;

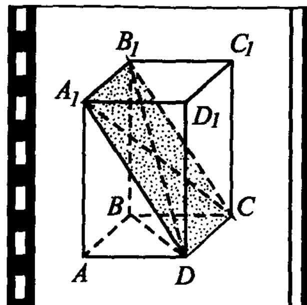
4) $361 - x^2 = 256 - x^2 + 225 - 2\sqrt{256 - x^2} \cdot 15\cos 60° \Rightarrow x = 8\sqrt{3}$ см;

5) ΔC_1CD, $CD = \sqrt{C_1D^2 - C_1C^2} = 8$ см;

6) $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = (AB \cdot AD\sin 60°) \cdot CC_1 = 1440$ см^3.

4. 18 см.

5. 144 см^3.



Рыс. 47

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $A_1C = 14$ см, $B_1D = 4\sqrt{10}$ см, $A_1D = 13$ см, $C_1D = 3\sqrt{17}$ см, $CC_1 = x$ (рыс. 47);

2) $DA_1B_1C_1$, $B_1D^2 + A_1C^2 = 2(A_1D^2 + DC^2)$, $196 + 160 = 2(322 - x^2) \Rightarrow x = 12$ см;

3) ΔC_1CD, $CD = \sqrt{C_1D^2 - CC_1^2} = 3$ см;

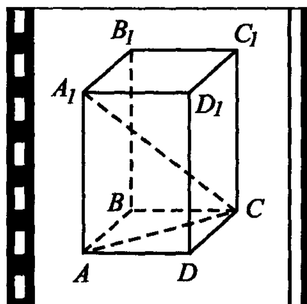
4) ΔA_1AD, $AD = \sqrt{A_1D^2 - A_1A^2} = 5$ см, ΔB_1BD, $BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^2} = 4$ см;

5) ΔABD, $BD = 4$ см, $S_{асн} = 2S_{ABD} = AB \cdot BD = 12$ см^2;

6) $V = S_{асн} \cdot BB_1 = 144$ см^3.

6. 432 см^3, 384 см^2.

7. 17 см, 10 см.



Рыс. 48

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $V = 3360$ см³, $S_{пав} = 1416$ см^2, $S_{бак} = 1080$ см^2, $A_1C = 29$ см, $AA_1 = H$ (рыс. 48);

2) $S_{пав} = 2S_{асн} + S_{бак} \Rightarrow$

$S_{асн} = \frac{1}{2}(S_{пав} - S_{бак}) = 168$ см^2;

3) $V = S_{асн} \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{S_{асн}} = 20$ см;

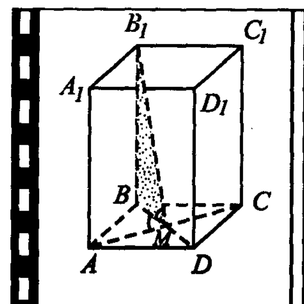
4) $S_{бак} = P_{асн} \cdot H \Rightarrow P_{асн} = \frac{S_{бак}}{H} = 54$ см, $DA = x$, $DC = 27 - x$;

5) ΔA_1AC, $AC = \sqrt{A_1C^2 - A_1A^2} = 21$ см;

6) ΔADC, $P_{ADC} = AC + AD + DC = 48$ см, $p = \frac{1}{2}P = 24$ см, $S_{ADC} = \sqrt{p(p - AC)(p - AD)(p - DC)} = 6\sqrt{2(-x^2 + 27x - 72)}$, $S_{ABCD} = 2S_{ADC}$, $168 = 12\sqrt{2(-x^2 + 27x - 72)}$, $x = 17$ см, $DC = 10$ см.

8. 11 см.

9. $2b^2 \sin 2\beta\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.



Рыс. 49

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $\angle AMB = \alpha$, $B_1M = b$, $\angle BMB_1 = \beta$ (рыс. 49);

2) ΔB_1BM_1, $B_1B = B_1M \sin\beta = b\sin\beta$, $BM = B_1M\cos\beta = b\cos\beta$, $BD = 2BM = 2b\cos\beta$;

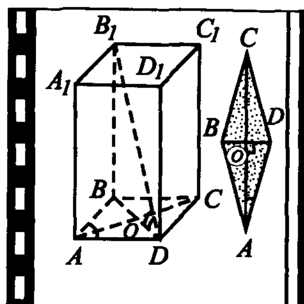
3) ΔBAD, $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$,

$$AB = BD\sin\frac{\alpha}{2} = 2b\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2},\ AD = BD\cos\frac{\alpha}{2} = 2b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta;$$

4) $S_{бак} = P_{асн} \cdot H = 2(AD + AB) \cdot BB_1 = 2b^2 \sin 2\beta\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

10. $\frac{1}{2}l^3\cos^2\varphi\sin\varphi\sin\beta$.

11. $2a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.



Рыс. 50

Указанне:

1) $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = \alpha$, $AB = a$, $\angle BDB_1 = \beta$ (рыс. 50);

2) ΔDOA_1, $OD = AD\sin\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}$,

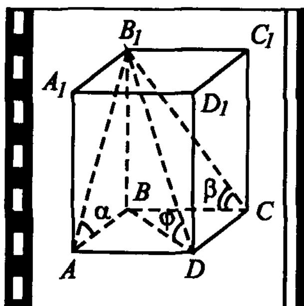
$BD = 2OD = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) ΔB_1BD, $BB_1 = BD\,\mathrm{tg}\,\beta = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$;

4) $S_{ABCD} = a^2\sin\alpha$, $V = S_{ABCD}BB_1 = 2a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

12. $\frac{1}{2}m^3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

13. $\mathrm{arcctg}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}$.



Рыс. 51

Указанне:

1) $\angle B_1CB = \beta$, $\angle B_1AB = \alpha$, $\angle B_1DB = \varphi$, $BB_1 = x$ (рыс. 51);

2) ΔB_1BC, $BC = BB_1\,\mathrm{ctg}\,\beta = x\,\mathrm{ctg}\,\beta$;

3) ΔB_1BA, $BA = BB_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha = x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

4) ΔBAD,

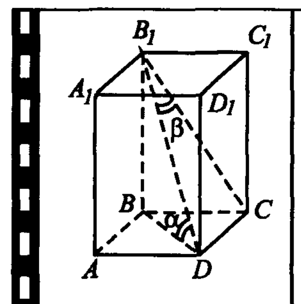
$BD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = x\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}$;

5) ΔB_1BD, $\mathrm{ctg}\,\varphi = BD : BB_1 =$

$= \sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}$, такім чынам, $\varphi = \mathrm{arcctg}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}$.

14. 480 см^3.

15. $\dfrac{S\sqrt{S}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{\sin\beta}\cdot\sqrt[4]{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.



Рыс. 52

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle DB_1C = \beta$, $S_{ABCD} = S$, $AD = x$, $DC = \frac{S}{x}$ (рыс. 52);

2) ΔDCB_1, $B_1D = \dfrac{DC}{\sin\beta} = \dfrac{S}{x\sin\beta}$;

3) ΔDAB,

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \dfrac{\sqrt{x^4 + S^2}}{x}$;

4) ΔB_1BD, $B_1D = \dfrac{BD}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{x^4 + S^2}}{x\cos\alpha}$, $\dfrac{S}{x\sin\beta} = \dfrac{\sqrt{x^4 + S^2}}{x\cos\alpha}$, значыць,

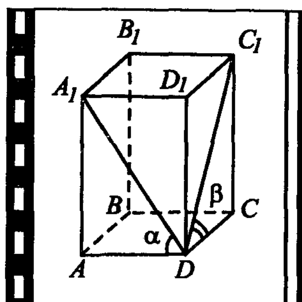
$x = \sqrt{\dfrac{S}{\sin\beta}}\cdot\sqrt[4]{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$;

5) ΔB_1BD, $BB_1 = B_1D\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{S}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{\sin\beta}\cdot\sqrt[4]{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$;

6) $V = S_{ABCD}\cdot BB_1 = \dfrac{S\sqrt{S}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{\sin\beta}\cdot\sqrt[4]{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.

16. $\dfrac{a^3\cos^2\alpha\sin\beta\sin\alpha}{2\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.

17. 248 см^2.



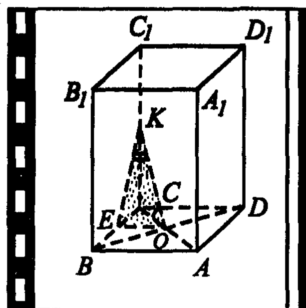
Рыс. 53

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $A_1D = 20\sqrt{2}$, $C_1D = 5$ см, $\angle A_1DA = \alpha$, $\angle C_1DC = \beta$, $\beta - \alpha = 45°$ (рыс. 53);
2) ΔA_1AD, $AA_1 = A_1D\sin\alpha = 20\sqrt{2}\sin\alpha$;
3) ΔC_1CD, $CC_1 = C_1D\sin\beta = 5\sin(\alpha + 45°)$;
4) $20\sqrt{2}\sin\alpha = 5\sin(\alpha + 45°) \Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}, \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{50}}$;
5) ΔA_1AD, $AD = A_1D\cos\alpha = 28$ см, $AA_1 = 4$ см;
6) ΔC_1CD, $CD = \sqrt{C_1D^2 - C_1C^2} = 3$ см;
7) $S_{бак} = 2(AD + DC) \cdot CC_1 = 248$ см^2.

18. 27 см^3.

19. $4m^3\sin^2 2\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}$.



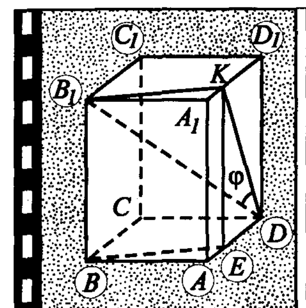
Рыс. 54

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, O – яго цэнтр, K – сярэдзіна CC_1, $OK = m$, $BE = EC$, $\angle KOC = \alpha$, $\angle OKE = 2\alpha$;
2) ΔOEK, $OE = OK\sin 2\alpha = m\sin 2\alpha$, $EK = OK\cos 2\alpha = m\cos 2\alpha$, $DC = 2OE = 2m\sin 2\alpha$ (рыс. 54);
3) ΔOCK, $CK = OK\sin\alpha = m\sin\alpha$, $CC_1 = 2CK = 2m\sin\alpha$, $CO = OK\cos\alpha = m\cos\alpha$;
4) ΔKCE, $CE = \sqrt{EK^2 - CK^2} = m\cos\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}$, $CB = 2CE = 2m\cos\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}$;
5) $V = CB \cdot CD \cdot CC_1 = 4m^3\sin^2 2\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}$.

20. $2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

21. $\frac{h^3\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\beta}}{\sin 2\beta}$.



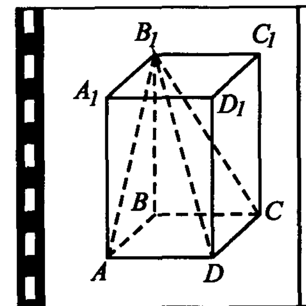
Рыс. 55

Указанне:

1) $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 2\beta$, $BE \perp AD$, $BE = h, B_1K \parallel BE$, $\angle B_1DK = \varphi$ (рыс. 55);
2) ΔAEB, $AB = \frac{BE}{\sin 2\beta} = \frac{h}{\sin 2\beta}$, $S_{ABCD} = AD \cdot BE = \frac{h^2}{\sin 2\beta}$, $AE = BE\operatorname{ctg}2\beta = h\operatorname{ctg}2\beta$;
3) ΔB_1KD, $DK = B_1K\operatorname{ctg}\varphi = h\operatorname{ctg}\varphi$, $ED = AD - AE = h\operatorname{tg}\beta$;
4) ΔKED, $EK = \sqrt{DK^2 - ED^2} = h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\beta}$;
5) $V = S_{ABCD} \cdot EK = \frac{h^3\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\beta}}{\sin 2\beta}$.

22. $\frac{d^3 ctg^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

23. $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$.



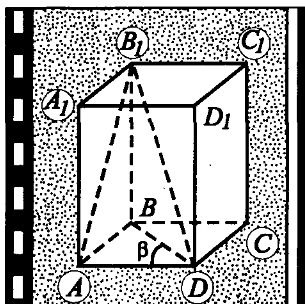
Рыс. 56

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $B_1D = d$, $\angle AB_1D = \angle CB_1D = \alpha$ (рыс. 56);
2) ΔB_1AD, $AD = B_1D\sin\alpha = d\sin\alpha$, $DC = AD, AB_1 = B_1D\cos\alpha = d\cos\alpha$;
3) ΔB_1BA, $BB_1 = \sqrt{B_1A^2 - AB^2} = d\sqrt{\cos 2\alpha}$;
4) $V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = AD^2 \cdot BB_1 = = d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$.

24. 30 см^3.

25. $a^3 \operatorname{tg}\beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}$.



Рыс. 57

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $AD = a$, $\angle B_1DA = \alpha$, $\angle BDA = \beta$ (рыс. 57);
2) ΔBAD, $AB = AD\operatorname{tg}\beta = a\operatorname{tg}\beta$
3) ΔB_1AD, $AB_1 = AD\operatorname{tg}\alpha = a\operatorname{tg}\alpha$;
4) ΔB_1BA,

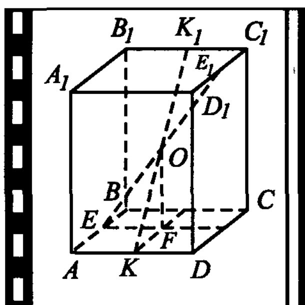
$BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}$;

5) $V = AB \cdot AD \cdot BB_1 =$

$= a^3 \operatorname{tg}\beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}$.

26. 288 см^2.

27. $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.



Рыс. 58

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, F – яго цэнтр, $AE = EB$, $AK = KD$, O – цэнтр паралелепіпеда, $\angle OEF = \alpha$, $EE_1 \parallel AD_1$, $KK_1 \parallel DC_1$, $\angle OKF = \beta$, $\angle EOK = \varphi$, $DC = x$, $AD = y$ (рыс. 58);
2) ΔOFK, $OF = FK\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{2}\operatorname{tg}\beta$,

$OK = \frac{KF}{\cos\beta} = \frac{x}{2\cos\beta}$;

3) ΔOFE, $OF = EF\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{x}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{2}\operatorname{tg}\alpha$, значыць,

$x = \frac{y\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, $OK = \frac{y\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\beta}$, $OE = \frac{EF}{\cos\alpha} = \frac{y}{2\cos\alpha}$;

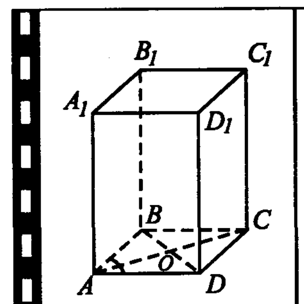
4) ΔEFK, $EK = \frac{1}{2}BD = \frac{y\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}{2\operatorname{tg}\beta}$;

5) $EK^2 = OE^2 + OK^2 - 2OE \cdot OK\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta$,

$\varphi = \arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

28. 6912 см^3.

29. $\frac{1}{4}Sd\cos\frac{\alpha}{2}$.



Рыс. 59

Указанне:

1) $ABCD$ – ромб, $BD = d$, $\angle BAD = \alpha$, $S_{бак} = S$ (рыс. 59);
2) ΔAOD, $OD = \frac{d}{2}$, $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$,

$AD = \frac{OD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

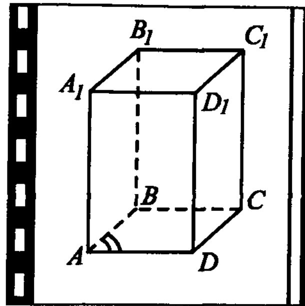
3) $S_{бак} = 4AD \cdot AA_1$, $S = \frac{4d \cdot AA_1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$

$AA_1 = \frac{S \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2d}$;

4) $V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = AD^2\sin\alpha \cdot AA_1 = \frac{1}{4}Sd\cos\frac{\alpha}{2}$.

30. $d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

31. $\frac{abS}{4(a+b)}$.



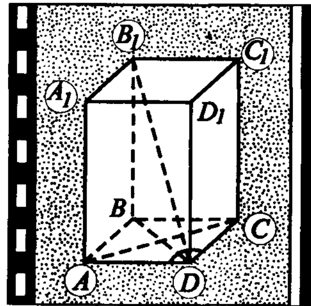
Рыс. 60

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $AB = b$, $AD = a$, $\angle BAD = 30°$, $S_{бак} = S$ (рыс. 60);
2) $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 30° = \frac{1}{2}ab$;
3) $S_{бак} = P_{ABCD} \cdot AA_1$, $S = 2AA_1(a+b)$, значыць, $AA_1 = \frac{S}{2(a+b)}$;
4) $V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = \frac{abS}{4(a+b)}$.

32. 432 см^2.

33. $2ab\sin\alpha\sqrt{-ab\cos\alpha}$.



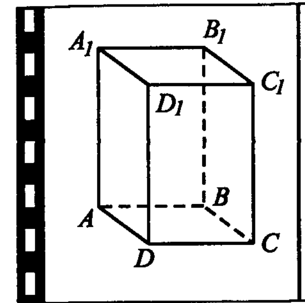
Рыс. 61

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $\angle ADC = \alpha$, $AD = b$, $AB = a$, $AC = B_1D$ (рыс. 61);
2) ΔADC,
$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$;
3) ΔABD,
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$;
4) ΔB_1BD, $B_1B = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = 2\sqrt{-ab\cos\alpha}$;
5) $S_{ABCD} = AB \cdot AD\sin\alpha = ab\sin\alpha$,
$V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = 2ab\sin\alpha\sqrt{-ab\cos\alpha}$.

34. $\frac{R \cdot S\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

35. 432 см^3.



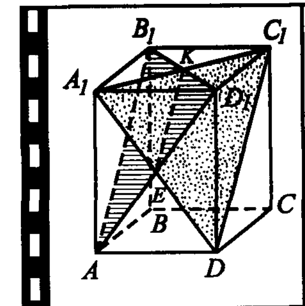
Рыс. 62

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $P_{ABCD} = 28$ см, $P_{DD_1C_1C} = 30$ см, $S_{поўн} = 348 \text{ см}^2$ (рыс. 62);
2) $AD = x$, $DC = \frac{P_{ABCD}}{2} - AD = 14 - x$,
$CC_1 = \frac{P_{DD_1C_1C}}{2} - DC = x + 1$;
3) $S_{поўн} = 2S_{асн} + S_{бак}$,
$348 = 2x(14 - x) + 28(x + 1)$,
($x = 20$ не задавальняе ўмове) $x = 8$ см, $DC = 6$ см, $CC_1 = 9$ см;
4) $V = AD \cdot DC \cdot AA_1 = 432 \text{ см}^3$.

36. 810 см^3.

37. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



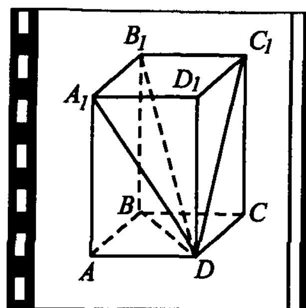
Рыс. 63

Указанне:

1) K – цэнтр грані $A_1B_1C_1$, E – цэнтр грані AA_1D_1D, $AB = a$ (рыс. 63);
2) ΔDCC_1, $DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = a\sqrt{2}$;
3) ΔDA_1C_1 – роўнастаронні, $A_1K = KC_1$,
$A_1E = ED \Rightarrow KE = \frac{1}{2}C_1D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

38. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

39.



Рыс. 64

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $BD = d_1$, $A_1D = d_2$, $C_1D = d_3$ (рыс. 64);

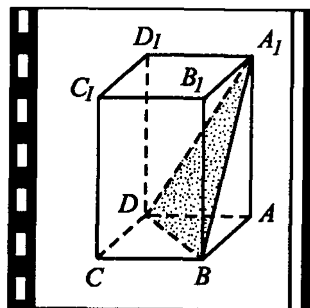
2) ΔB_1A_1D, $B_1D^2 = d_2^2 + A_1B_1^2$;

3) ΔB_1C_1D, $B_1D^2 = d_3^2 + B_1C_1^2$;

4) $2B_1D^2 = d_2^2 + d_3^2 + (A_1B_1^2 + B_1C_1^2) =$

$= d_2^2 + d_3^2 + d_1^2, B_1D^2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$.

41.



Рыс. 65

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $AB = b$, $CB = a$, $BB_1 = c$ (рыс. 65);

2) $S = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$;

3) ΔDD_1A_1,

$DA_1 = \sqrt{DD_1^2 + D_1A_1^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$;

4) ΔA_1AB,

$BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$;

5) ΔDCB, $DB = \sqrt{DC^2 + CB^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

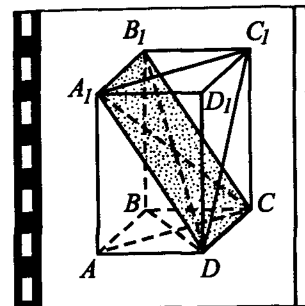
6) $p = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + b^2})$,

$S^2_{A_1BD} = p(p - \sqrt{a^2 + c^2})(p - \sqrt{b^2 + c^2})(p - \sqrt{a^2 + b^2}) =$

$= \frac{1}{4}(a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2)$;

7) $S : S^2_{A_1BD} = 8 : 1$.

43. 360 см^2, 156 см^2, 108 см^2.



Рыс. 66

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $B_1D = 15$ см, $A_1C = \sqrt{313}$ см, $A_1D = 2\sqrt{61}$ см, $C_1D = 13$ см (рыс. 66);

2) DA_1B_1C,

$B_1D^2 + A_1C^2 = 2(A_1D^2 + DC^2)$,

$313 + 225 = 488 + 2 \cdot DC^2 \Rightarrow DC = 5$ см;

3) ΔC_1CD, $CC_1 = \sqrt{C_1D^2 - DC^2} = 12$ см;

4) ΔA_1AD, $AD = \sqrt{A_1D^2 - AA_1^2} = 10$ см;

5) $S_{бак} = P_{асн} \cdot AA_1 = 360$ см^2;

6) ΔA_1AC, $AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = 13$ см,

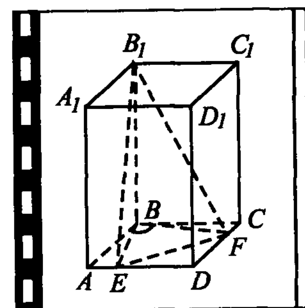
$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 156$ см^2;

7) ΔB_1BD, $BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^2} = 9$ см,

$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1 = 108$ см^2.

44. 198 см^2.

45. 295 см^2.



Рыс. 67

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $B_1E \perp AD$, $B_1F \perp DC$, $BB_1 = 8$ см, $B_1E = \sqrt{89}$ см, $B_1F = 10$ см, $EF = 5$ см, $\angle EBF = \alpha$;

2) ΔB_1BE, $BE = \sqrt{B_1E^2 - B_1B^2} = 5$ см;

3) ΔB_1BF, $BF = \sqrt{B_1F^2 - B_1B^2} = 6$ см;

4) ΔBEF, (рыс. 67)

$\cos\alpha = \dfrac{BE^2 + BF^2 - FE^2}{2BF \cdot BE} = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$;

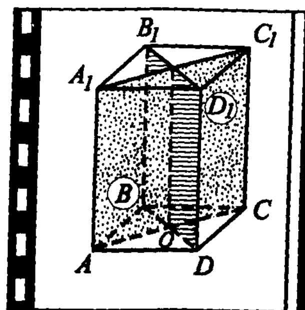
5) ΔBEA, $\angle BAE = \alpha$, $AB = \dfrac{BE}{\sin\alpha} = \dfrac{25}{4}$ см;

6) ΔBFC, $\angle BCF = \alpha$, $BC = \dfrac{BF}{\sin\alpha} = \dfrac{30}{4}$ см;

7) $S_{поўн} = 2S_{асн} + S_{бак} = 2AB \cdot AD\sin\alpha + 2(AB + AD)\cdot AA_1 = 295$ см^2.

46. 240 см^2.

47. 360 см³.



Рыс. 68

Указанне:

1) $ABCD$ – ромб, $BD \perp AC$, $BD = x$, $AC = y$, $AA_1 = h$, $S_{ABCD} = S_{BB_1D_1D} = 60$, $S_{ACC_1A_1} = 72$ (рыс. 68);

2) $S_{ACC_1A_1} = AC \cdot AA_1$, $yh = 72 \Rightarrow y = \dfrac{72}{h}$;

3) $S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1, xh = 60 \Rightarrow x = \dfrac{60}{h}$;

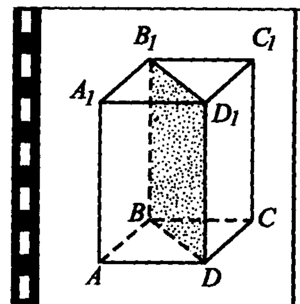
4) $S_{ABCD} = \dfrac{BD \cdot AC}{2}$, $60 = \dfrac{xy}{2}$,

$60 = \dfrac{4320}{2h^2}$, $h = 6$;

5) $V = S_{ABCD}h = 360$ см³.

48. $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

49. $\dfrac{Q\sqrt{Q}\cdot mn}{m^2+n^2}$.



Рыс. 69

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $AD : DC = m : n$, $BB_1 = B_1D_1$, $S_{B_1BDD_1} = Q$, $AD = mx$, $DC = nx$ (рыс. 69);

2) ΔBAD,

$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = x\sqrt{m^2+n^2}$;

3) $S_{BB_1D_1D} = BD^2$, $Q = x^2(m^2+n^2) \Rightarrow$

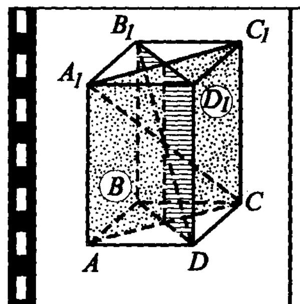
$x = \dfrac{\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $AD = \dfrac{m\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$,

$DC = \dfrac{n\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $BD = B_1B = \sqrt{Q}$;

4) $V = S_{ABCD}\cdot BB_1 = AB \cdot AD \cdot BB_1 = \dfrac{Q\sqrt{Q}\cdot mn}{m^2+n^2}$.

50. $\dfrac{1}{2}d^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

51. 75 дм^2, 105 дм^2.



Рыс. 70

Указанне:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $AD = 66$ см, $DC = 63$ см, $AA_1 = 100$ см, $B_1D : A_1C = 25:29$, $B_1D = 25x$, $A_1C = 29x$ (рыс. 70);

2) ΔB_1BD,

$BD^2 = B_1D^2 - BB_1^2 = 625x^2 - 10000$;

3) ΔAA_1C,

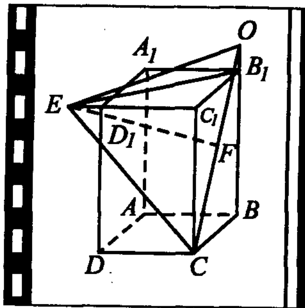
$AC^2 = CA_1^2 - AA_1^2 = 841x^2 - 10000$;

4) $BD^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DC^2)$, $1466x^2 - 20000 = 2(4356 + 3969) \Rightarrow$ $x = 5$ см, $B_1D = 125$ см, $BD = 75$ см, $AC = 105$ см;

5) $S_{BB_1D_1D} = BB_1 \cdot BD = 7500 \text{ см}^2$, $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 105 \text{ дм}^2$.

52. 720 см^2.

53. $\frac{3\sqrt{30}}{2}$ см.



Рыс. 71

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $AB = 3\text{см}$, $AA_1 = 5\text{см}$, $O \in BB_1$, $E \in D_1C_1$, $B_1O = y$, $ED_1 = x$, $CE = EO = OC$, $OF = FC$;

2) ΔCC_1E,

$CE = \sqrt{CC_1^2 + C_1E^2} = \sqrt{25 + (3 + x)^2}$;

3) ΔB_1C_1E,

$B_1E = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1E^2} = \sqrt{9 + (3 + x)^2}$;

4) ΔOB_1E, $OE = \sqrt{OB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{y^2 + 9 + (3 + x)^2}$;

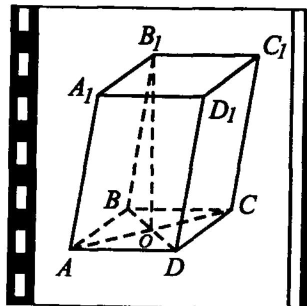
5) $OE = CE$, $\sqrt{25 + (3 + x)^2} = \sqrt{y^2 + 9 + (3 + x)^2} \Rightarrow y = 4$ см;

6) ΔOBC, $OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = 3\sqrt{10}$ см;

7) ΔEFO, $EF = OE \sin\angle FOE = \frac{3\sqrt{30}}{2}$ см (рыс. 71).

54. 25 см.

55. 240 см^3.



Рыс. 72

Указание:

1) $ABCD$ – паралелаграм, $AD = 9$ см, $DC = 7$ см, $AC = 14$ см, O – цэнтр асновы, $AA_1 = 6$ см (рыс. 72);

2) $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$,

$BD^2 + 196 = 2(49 + 81) \Rightarrow BD = 8$ см;

3) ΔB_1OB, $OB = \frac{1}{2}BD = 4$ см,

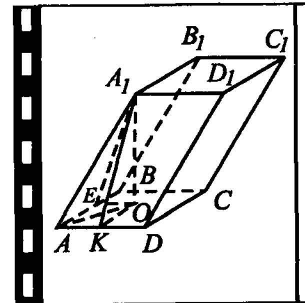
$B_1O = \sqrt{B_1B^2 - OB^2} = 2\sqrt{5}$ см;

4) $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\sqrt{p(p - AB)(p - BD)(p - AD)} = 24\sqrt{5} \text{ см}^2$;

5) $V = S_{ABCD} \cdot B_1O = 240 \text{ см}^3$.

56. 5400 см^3.

57. $a^2b\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.



Рыс. 73

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \alpha$, $AB = AD = a$, $AA_1 = b$, $OA_1 \perp ABCD$, $A_1K \perp AD$, $A_1E \perp AB$, $\Delta A_1AK = \Delta A_1AE$, $\angle OAE = \angle OAK = 45°$ (рыс. 73);

2) ΔA_1AK, $A_1K = b\sin\alpha$, $AK = b\cos\alpha$;

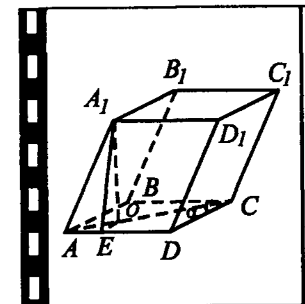
3) ΔA_1KO,

$A_1O = \sqrt{A_1K^2 - OK^2} = b\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$;

4) $V = S_{ABCD} \cdot A_1O = a^2b\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

58. 390 см³.

59. $2a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$.



Рыс. 74

Указание:

1) $ABCD$ – ромб, $AD = DC = DD_1 = a$, $\angle BAD = \alpha$, $A_1O \perp ABC$ (рыс. 74);

2) ΔA_1EA, $A_1E = AA_1 \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha$, $AE = AA_1\cos\alpha = a\cos\alpha$;

3) ΔAEO,

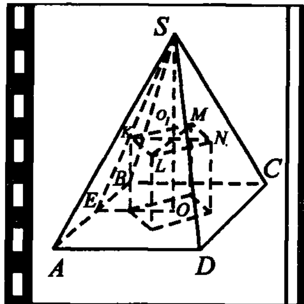
$EO = AE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

4) ΔA_1OE, $A_1O = \sqrt{A_1E^2 - OE^2} = a\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

5) $V = S_{ABCD} \cdot A_1O = AB^2 \cdot A_1O \sin\alpha = 2a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$.

60. $\frac{b^3\sqrt{2}}{2}$.

61. $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.



Рыс. 75

Указание:

1) $KL = x$, O – цэнтр грані $ABCD$, O_1 – цэнтр грані $KMNL$, $AE = EB$ (рыс. 75);

2) $KO_1 = \frac{1}{2}KN = \frac{1}{2}\sqrt{KL^2 + LN^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$,

$EO = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$;

3) ΔSOA, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$SO_1 = SO - OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} - x$;

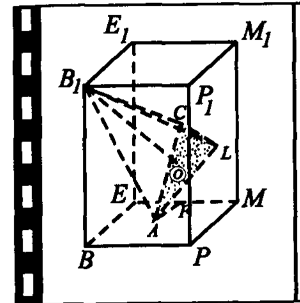
4) $\Delta SO_1K \sim \Delta SOE$; $KO_1 : EO = SO_1 : SO$,

$\frac{x\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x\right) : \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$;

5) $V = x^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

62. $\frac{a^3}{(1+\sqrt{2})^3}$.

63. $\frac{9}{4}$.



Рыс. 76

Указание:

1) A, L, C – цэнтры граняў $PBEM$, PP_1M_1M, MM_1E_1E, $B_1O \perp ALC$, $MF = FE$ (рыс. 76);

2) ΔAFC, $AC = \sqrt{AF^2 + FC^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

3) ΔALC, $AL = AC = LC$,

$S_{ALC} = \frac{1}{2}AC^2 \sin 60° = \frac{9\sqrt{3}}{8}$,

$OC = \frac{2}{3}AC \sin 60° = \sqrt{\frac{3}{2}}$;

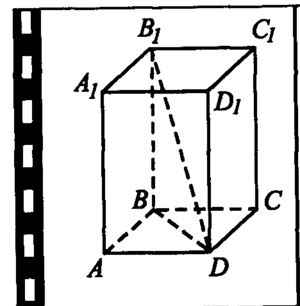
4) ΔB_1BA, $B_1A = \sqrt{BB_1^2 + BA^2} = \frac{\sqrt{54}}{2}$;

5) ΔB_1OA, $OB_1 = \sqrt{B_1A^2 - AO^2} = \sqrt{12}$;

6) $V = \frac{1}{3}S_{ALC} \cdot OB_1 = \frac{9}{4}$.

64. $\frac{3a^2}{2}$.

65. 160 см^3.



Рыс. 77

Указание:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $P_{ABCD} = 24$ см, $P_{DD_1C_1C} = 36$ см, $DC = x$, $AD = 12 - x$, $CC_1 = 18 - x$ (рыс. 77);

2) ΔABD,

$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + (12 - x)^2}$;

3) ΔB_1BD, $B_1D = d = \sqrt{B_1B^2 + BD^2} =$

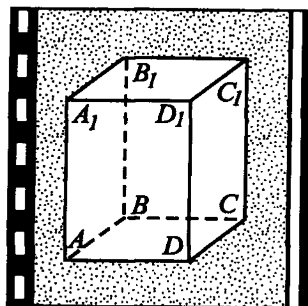
$= \sqrt{x^2 + (12-x)^2 + (18-x)^2} = \sqrt{3x^2 - 60x + 468}$,

$d' = \frac{3(x-10)}{\sqrt{3x^2 - 60x + 468}}$, $d' = 0 \Rightarrow x = 10$ см, $DC = 10$ см, $AD = 2$ см, $CC_1 = 8$ см;

4) $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 160$ см^3.

66. 105 см^3.

67. 384 см^2.



Рыс. 78

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $DC : AD = 3 : 5$, $DC = 3x$, $AD = 5x$, $P_{DD_1C_1C} = 36$ см (рыс. 78);

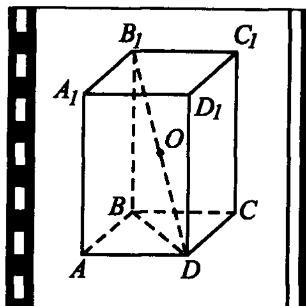
2) $CC_1 = \frac{P_{DD_1C_1C}}{2} - DC = 18 - 3x$;

3) $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 270x^2 - 45x^3$, $V' = 540x - 135x^2$, $V' = 0$, $\Rightarrow x = 4$см, $AD = 20$ см, $DC = 12$ см, $CC_1 = 6$ см;

4) $S_{бак} = P_{ABCD} \cdot AA_1 = 384$ см^2.

68. 144 см^3, $\frac{400}{3}$ см^3.

69. 112 см^3.



Рыс. 79

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $P_{ABCD} = 16$см, $B_1D = 9$см, O – цэнтр паралелепіпеда, $AB = x$, $AD = 8 - x$ (рыс. 79);

2) ΔBAD, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2x^2 - 16x + 64}$;

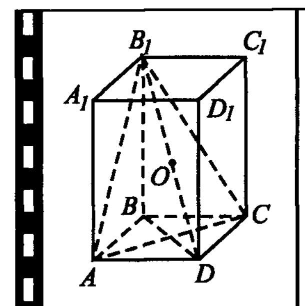
3) ΔB_1BD, $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{17 + 16x - 2x^2}$;

4) $S_{бак} = P_{ABCD} \cdot BB_1 = 16\sqrt{17 + 16x - 2x^2}$, $S'_{бак} = \frac{8(16 - 4x)}{\sqrt{17 + 16x - 2x^2}}$, $S'_{бак} = 0 \Rightarrow x = 4$ см, $AB = AD = 4$ см, $BB_1 = 7$ см;

5) $V = AB^2 \cdot BB_1 = 112$ см^3.

70. 20 см^3.

71. 529π см^3.



Рыс. 80

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $AB_1 = 16$см, $CB_1 = 21$см, $\angle AB_1C = 60°$, $AB = x$ (рыс. 80);

2) ΔAB_1C, $AC = \sqrt{AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cos 60°} = 19$см;

3) ΔB_1BA, $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{256 - x^2}$;

4) ΔABC, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{361 - x^2}$;

5) ΔB_1BC, $BB_1 = \sqrt{CB_1^2 - BC^2} = \sqrt{441 - (361 - x^2)}$;

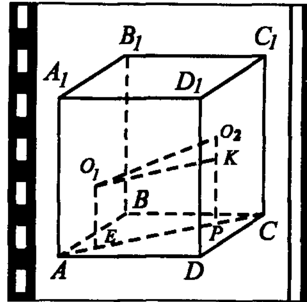
6) $256 - x^2 = 441 - 361 + x^2$, $x^2 = 88$ см², $BB_1 = \sqrt{168}$ см;

7) ΔB_1BD, $B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{529}$ см;

8) $R = \frac{1}{2} B_1D = \frac{\sqrt{529}}{2}$ см, $S = 4\pi R^2 = 529\pi$ см^3.

72. 1.

73. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.



Рыс. 81

Указанне:

1) O_1 – цэнтр шара, упісанага ў вугал A, $r_1 = \frac{1}{2}$ – яго радыус, O_2 – цэнтр шара, упісанага ў вугал C, r_2 – яго радыус, $O_1E \perp ABCD$, $O_2P \perp ABCD$, $O_1K \perp O_2P$;

2) $O_2K = O_2P - O_1E = r_2 - r_1$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (рыс. 81);

3) ΔABC, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

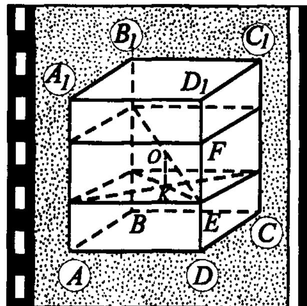
4) ΔO_2KO_1, $O_1K = EP = AC - AE - PC = \frac{3\sqrt{2}}{2} - r_1\sqrt{2} - r_2\sqrt{2}$,

$O_1O_2^2 = O_1K^2 + O_2K^2$, $(r_1+r_2)^2 = 2\left(\frac{3}{2} - (r_1+r_2)\right)^2 + (r_2-r_1)^2$,

$r_2^2 - 3r_2 + 1 \Rightarrow r_2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

74. $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$.

75. $\frac{19\pi a^2}{9}$.



Рыс. 82

Указанне:

1) $AB = a$, $DE = EF = FD_1 = \frac{a}{3}$, O – цэнтр куба, $OK \perp ABCD$ (рыс. 82);

2) ΔABD, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$;

3) ΔOKE, $KE = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

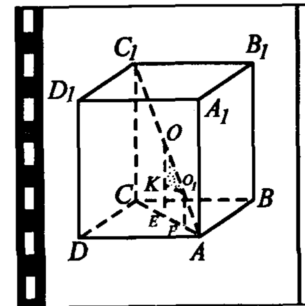
$OK = \frac{EF}{2} = \frac{a}{6}$,

$OE = R = \sqrt{OK^2 + KE^2} = \frac{a\sqrt{19}}{6}$;

4) $S = 4\pi R^2 = \frac{19\pi a^2}{9}$.

76. $\frac{416\pi}{3}$ см^3, 94π см^2.

77. $\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$.



Рыс. 83

Указанне:

1) $AB = a$, O – цэнтр шара, r – яго радыус, O_1 – цэнтр другога шара, r_1 – яго радыус, $OE \perp ABCD$, $O_1K \perp OE$, $O_1 \in AC_1$, $O_1P \perp ABCD$ (рыс. 83);

2) ΔABC, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$;

3) ΔACC_1, $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = a\sqrt{3}$,

$\sin \angle C_1AC = \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) ΔOKO_1, $OO_1 = r + r_1$, $OK = r - r_1$, $r = \frac{a}{2}$,

$OK = OO_1 \cdot \sin \angle OO_1K = \frac{r + r_1}{\sqrt{3}}$, $r - r_1 = \frac{r + r_1}{\sqrt{3}}$, $r_1 = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$.

78. $\frac{3}{8}a^2$.

79. $\frac{1}{2}a^2 \sin\alpha\sqrt{4tg^2\beta + 1}$.

Рыс. 84

Указание:

1) $ABCD$ – ромб, $AB = BC = a$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle B_1DB = \beta$, O – цэнтр грані $ABCD$ (рыс. 84);

2) ΔOAD, $AO = AD\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}$,

$OD = AD\sin\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}$,

$BD = 2OD = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) ΔB_1BD, $BB_1 = BD\,\mathrm{tg}\,\beta = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\,\beta$;

4) ΔB_1BO, $B_1O = \sqrt{B_1B^2 + BO^2} = a\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\beta + 1}$;

5) ΔAB_1C, $S_{AB_1C} = AO \cdot B_1O = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\beta + 1}$.

80. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

81. $\frac{1}{2}a(\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$.

Рыс. 85

Указание:

1) $A_1F = FD_1$, $AE = ED$ (рыс. 85);

2) $FK = LF = EL = \frac{a}{2}$;

3) ΔLFK, $LK = \sqrt{LF^2 + FK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

4) ΔLEC, $LC = \sqrt{LE^2 + EC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

$LC = CK$;

5) $P_{KLC} = CK + LC + KL = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)$.

82. $\frac{3a\sqrt{6}}{2}$.

83. $2\arcsin\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Рыс. 86

Указание:

1) $TADC$ – квадрат, O – яго цэнтр, $\angle BOD = \alpha$, $\angle ABC = 2\alpha$ (рыс. 86);

2) ΔBOD, $\cos\alpha = OD : OB$;

3) ΔBOC, $\mathrm{ctg}\,\alpha = OB : OC = OB : OD$ $\Rightarrow OB = OD\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

4) $\cos\alpha = \frac{OD}{OD\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$, $\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$,

$\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$, $\sin\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

$\alpha = \arcsin\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$, $\angle ABC = 2\arcsin\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$.

84. 3 дм^2.

85. $2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pi - 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рыс. 87

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $MTEQ$ – ромб, $TQ \parallel BD$, $PK \parallel OC$, $\angle EPK = 30°$, $\angle TEQ = \alpha$ (рыс. 87);

2) ΔEKP, $PE = x$, $EK = \frac{x}{2}$,

$PK = \sqrt{PE^2 - EK^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$;

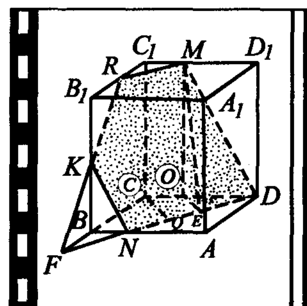
3) ΔEPQ, $PQ = OD = OC = PK = \frac{x\sqrt{3}}{2}$;

4) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = PQ : PE = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\angle MTE = \pi - \alpha = \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

86. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

87. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{13}}{3}$.



Рыс. 88

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $C_1M = MD_1$, $AD = x$, $AN = 2NB$, $NK \parallel DM$, $RM \parallel ND$, $F = ND \cap BC$, $MO \perp CD$, $CQ \perp DN$, $OE \parallel CQ$, $\angle MEO = \alpha$;

2) $\Delta FBN \sim \Delta DAN$, $BF : AD = BN : NA$ $\Rightarrow BF = \frac{x}{2}$, $CF = BF + BC = \frac{3x}{2}$ (рыс. 88);

3) ΔFCD, $FD = \sqrt{CF^2 + CD^2} = \frac{x\sqrt{13}}{2}$,

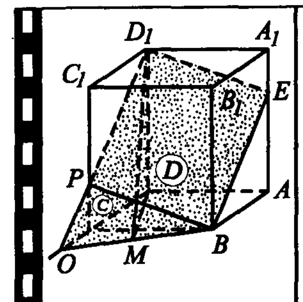
$CF \cdot CD = FD \cdot CQ$, такім чынам, $CQ = \frac{3x}{\sqrt{13}}$;

4) ΔCQD, $CO = OD$, $EO \parallel CQ \Rightarrow OE = \frac{1}{2}CQ = \frac{3x}{2\sqrt{13}}$;

5) ΔMOE, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OM}{OE} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

88. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{4}$.

89. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$.



Рыс. 89

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $AD = x$, $C_1P = 2CP$, $O = D_1P \cap DC$, $DM \perp BO$, $\angle D_1MD = \alpha$ (рыс. 89);

2) $\Delta C_1PD_1 \sim \Delta CPO$, $C_1D_1 : CO = C_1P : CP$, $CO = \frac{x}{2}$;

3) ΔBCO, $BO = \sqrt{BC^2 + CO^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$;

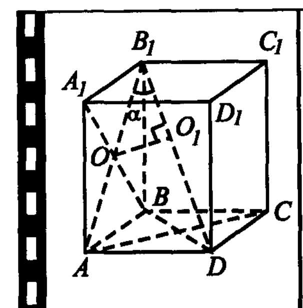
4) ΔDBO, $S_{DBO} = \frac{1}{2}(DB \cdot DO \sin 45^\circ) = \frac{3x^2}{4}$, $S_{DBO} = \frac{BO \cdot DM}{2}$,

$\frac{3x^2}{4} = \frac{x\sqrt{5}DM}{4} \Rightarrow DM = \frac{3x}{\sqrt{5}}$;

5) ΔD_1DM, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{DD_1}{DM} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$.

90. $\arccos\frac{1}{3}$.

91. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.



Рыс. 90

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $AB = a$, O – цэнтр грані AA_1B_1B, $OO_1 \perp DB_1$, $\angle AB_1D = \alpha$;

2) ΔB_1AD, $\sin\alpha = \frac{AD}{B_1D} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (рыс. 90);

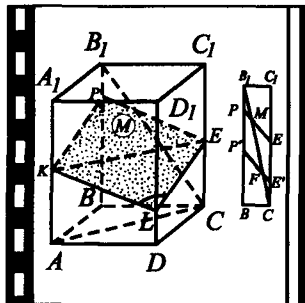
3) ΔABB_1, $AB_1 = \sqrt{BB_1^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$,

$OB_1 = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

4) ΔB_1O_1O, $OO_1 = OB_1 \cdot \sin\alpha = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

92. $h\sqrt{6}$.

93. 28 см^2.



Рыс. 91

Указанне:

1) $ABCD$ – прамавугольнік, $AB = 4$ см, $AD = 6$ см, $AA_1 = 8$ см, $AK = KA_1$, $DL = 2$ см, $MC = 2B_1M$, $PE \parallel KL$, $M \in PE$, $\angle KLE = \alpha$, $P'E' \parallel PE$, $F = B_1C \cap P'E'$ (рыс. 91);

2) ΔB_1BC, $B_1C = \sqrt{B_1B^2 + BC^2} = 10$ см, $B_1M = \frac{B_1C}{3} = \frac{10}{3}$ см;

3) $\Delta B_1MP \sim \Delta B_1FP'$,

$B_1M : B_1F = B_1P : B_1P'$, $\frac{10}{3} : \frac{20}{3} = \frac{B_1P}{4} \Rightarrow B_1P = 2$ см;

4) $KPEL$ – паралелаграм, $KL = \sqrt{AD^2 + \left(\frac{AK}{2}\right)^2} = \sqrt{40}$ см,

$LE = \sqrt{DC^2 + \left(\frac{CE}{2}\right)^2} = \sqrt{20}$ см, $KE = AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{52}$ см;

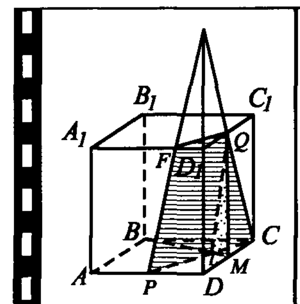
5) ΔKLE, $KE^2 = KL^2 + LE^2 - 2KL \cdot LE\cos\alpha$, такім чынам,

$\cos\alpha = \frac{KL^2 + LE^2 - KE^2}{2KL \cdot LE} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$;

6) $S_{KLEP} = KL \cdot LE\sin\alpha = 28$ см^2.

94. 124 см^2.

95. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{5})$.



Рыс. 92

Указанне:

1) $AP = PD$, $D_1Q = QC_1$, $M \in DC$, $QM \parallel CC_1$, $L = BM \cap CP$, $F \in A_1D_1$, $QF \parallel CP$, $\angle QLM = \alpha$, $AB = a$ (рыс. 92);

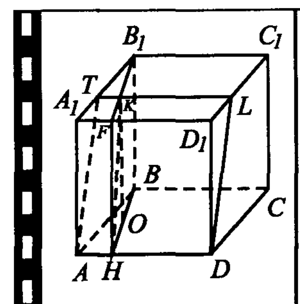
2) ΔCDP, $CP = \sqrt{CD^2 + DP^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

3) $\Delta CLM \sim \Delta CDP$, $CM : CP = LM : PD$, $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = LM : \frac{a}{2} \Rightarrow LM = \frac{a}{2\sqrt{5}}$;

4) ΔQML, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{QM}{ML} = 2\sqrt{5}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(2\sqrt{5})$.

96. $\arccos\left(-\frac{5}{3\sqrt{17}}\right)$.

97. $2a^3$, $\frac{4}{3}a^2\sqrt{3}$.



Рыс. 93

Указанне:

1) $ABCD$ – ромб, $BB_1 = a$, $AB = 2a$, $\angle BAD = 30°$, $T \in A_1B_1$, $L \in D_1C_1$, $TL \parallel AD$, $BH \perp AD$, $KO \perp BH$, $\angle KHB = 60°$ (рыс. 93);

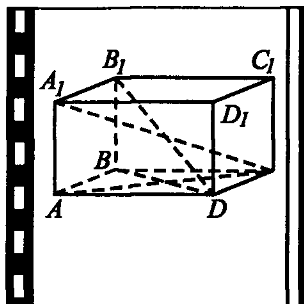
2) ΔBHA, $BH = \frac{AB}{2} = a$;

3) ΔKOH, $KO = BB_1 = a$, $KH = \frac{KO}{\sin 60°} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$;

4) $V = S_{ABCD} \cdot KO = BH \cdot AD \cdot KO = 2a^3$, $S_{сеч} = AD \cdot KH = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

98. $\frac{3a^2}{8}$.

99. $a\sqrt{6}$, $a\sqrt{10}$.



Рыс. 94

Указанне:

1) $AB = a$, $AD = 2a$, $\angle BAD = 60°$,

$\angle BDB_1 = 45°$ (рыс. 94);

2) ΔABD,

$BD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos 60° = 3a^2$,

$BD = a\sqrt{3}$;

3) ΔBB_1D, $BB_1 = BD\,\mathrm{tg}45° = a\sqrt{3}$;

4) $B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1{}^2} = a\sqrt{6}$;

5) $ABCD$, $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, такім чынам, $AC^2 = 7a^2$;

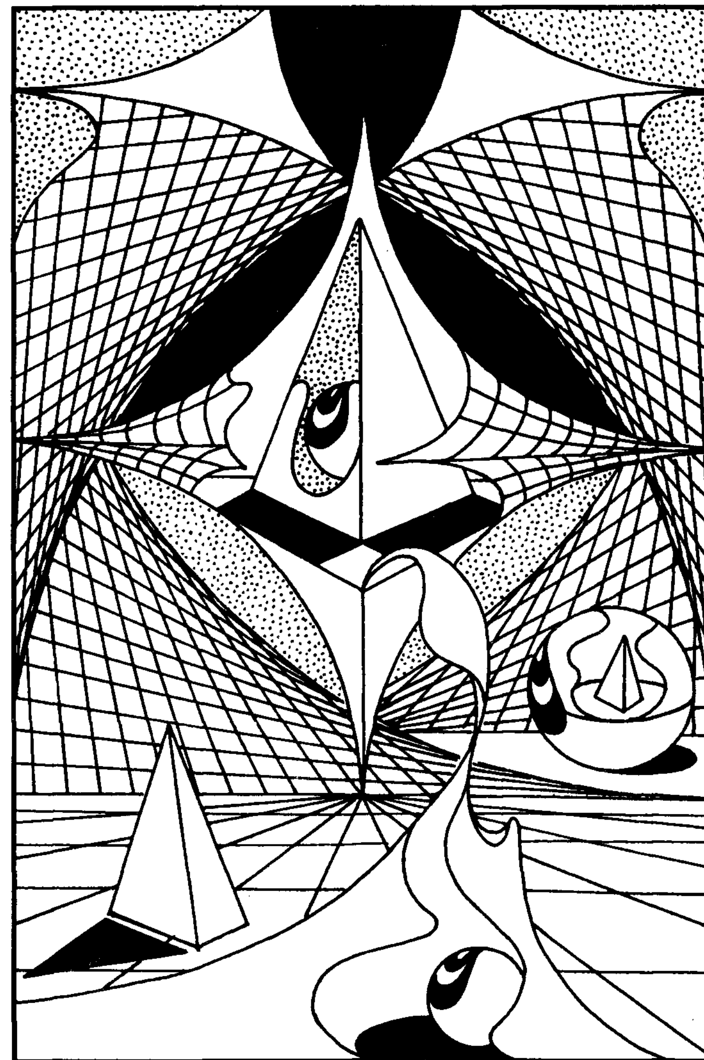
6) $AA_1 = BB_1 = a\sqrt{3}$;

7) ΔAA_1C, $A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1{}^2} = a\sqrt{10}$.

100. 625 см², $25\sqrt{601}$ см².

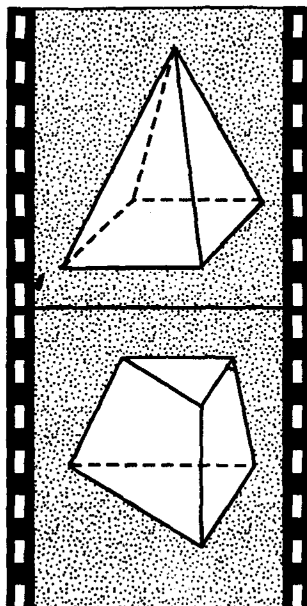
3

Піраміда



3. ПІРАМІДА

3.1. Формулы, задачы


Рыс. 95

1. Адвольная піраміда (S – плошча асновы; H – вышыня; V – аб'ём).

$$V = \frac{1}{3} S_{асн} \cdot H .$$

2. Правільная піраміда (P – перыметр асновы; l – апафема; $S_{бак}$ – плошча бакавой паверхні; V – аб'ём).

$$S_{бак} = \frac{1}{2} P l , \ V = \frac{1}{3} S_{асн} \cdot H .$$

3. Адвольная ўсечаная піраміда (S_1, S_2 – плошчы асноў; h – вышыня; V – аб'ём).

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) .$$

4. Правільная ўсечаная піраміда (P_1, P_2 – перыметры асноў; l – апафема; $S_{бак}$ – плошча бакавой паверхні).

$$S_{бак} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) l .$$

5. Сфера, апісаная каля піраміды:

1) для таго, каб каля піраміды можна было апісаць сферу, неабходна і дастаткова, каб каля асновы піраміды можна было апісаць акружнасць;
2) каля любога тэтраэдра можна апісаць сферу.

6. Сфера, упісаная ў піраміду:

1) калі ў аснову піраміды можна ўпісаць акружнасць, а вяршыня піраміды артаганальна праецыруецца ў цэнтр гэтай акружнасці, то ў піраміду можна ўпісаць сферу;
2) у любую правільную піраміду можна ўпісаць сферу;
3) у любы тэтраэдр можна ўпісаць сферу.

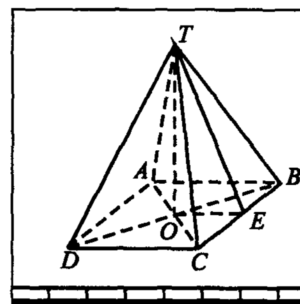
7. Цэнтр акружнасці, апісанай каля асновы піраміды:

1) калі ўсе бакавыя канты піраміды ўтвараюць з плоскасцю асновы роўныя вуглы, то аснова вышыні піраміды супадае з цэнтрам акружнасці, апісанай каля асновы піраміды;
2) калі даўжыні ўсіх бакавых кантаў піраміды роўныя, то аснова вышыні піраміды супадае з цэнтрам акружнасці, апісанай каля асновы.

8. Цэнтр акружнасці, упісанай у аснову піраміды:

1) калі ўсе бакавыя грані піраміды ўтвараюць з асновай роўныя вуглы, то аснова вышыні піраміды супадае з цэнтрам акружнасці, упісанай у аснову піраміды;
2) калі даўжыні ўсіх апафем бакавых граняў піраміды роўныя, то аснова вышыні піраміды супадае з цэнтрам акружнасці, упісанай у аснову піраміды.

Задача 1. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе плоскі вугал пры вяршыні роўны α. Знайдзіце вугал нахілу бакавой грані да асновы піраміды.

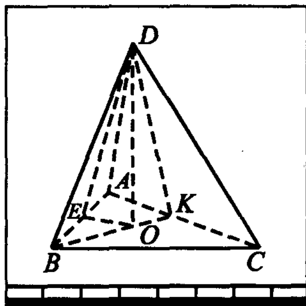


Рыс. 96

Рашэнне. Аснова вышыні TO дадзенай піраміды ёсць цэнтр акружнасці, апісанай каля квадрата $ABCD$. Няхай пункт E – сярэдзіна канта BC. Тады адрэзак OE перпендыкулярны канту BC (медыяна OE у раўнабедраным трохвугольніку COB з'яўляецца вышынёй). Па тэарэме аб трох перпендыкулярах адрэзак TE перпендыкулярны канту BC, значыць, $\angle OET = \varphi$ – шукаемы. Абазначым даўжыню адрэзка CE праз x, тады ў

прамавугольным трохвугольніку TEC ($\angle TEC = 90°$, $\angle CTE = \frac{\alpha}{2}$, $CE = x$) катэт $TE = x\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. З прамавугольнага трохвугольніка TOE знаходзім $\cos\varphi = \frac{OE}{TE} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Такім чынам, $\varphi = \arccos\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$ (рыс. 96).

Задача 2. Аснова піраміды – раўнабедраны трохвугольнік, бакавыя стораны якога маюць даўжыню a і ўтвараюць вугал α. Двухгранныя вуглы пры ўсіх старанах асновы роўныя β. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні піраміды.



Рыс. 97

Рашэнне. Няхай у аснове піраміды $ABCD$ ляжыць раўнабедраны трохвугольнік ABC ($AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$). Па ўмове ўсе бакавыя грані піраміды ўтвараюць з плоскасцю асновы роўныя вуглы. Таму аснова вышыні піраміды супадае з цэнтрам O акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC (пункт O ляжыць на вышыні BK трохвугольніка ABC). Правядзём $OE \perp AB$. Па тэарэме аб трох перпендыкулярах $DK \perp AC$ і $DE \perp AB$.

Такім чынам, $\angle DEO = \angle DKO = \beta$. Знаходзім $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\alpha = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$. У прамавугольным трохвугольніку AKB катэт $AK = AB\sin\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}$. $AC = 2AK = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$. Адрэзак OK – радыус упісанай акружнасці, значыць, $OK = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + AC} = \frac{a\sin\alpha}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$.

У прамавугольным трохвугольніку DOK гіпатэнуза $DK = \frac{OK}{\cos\beta} = \frac{a\sin\alpha}{2\cos\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$.

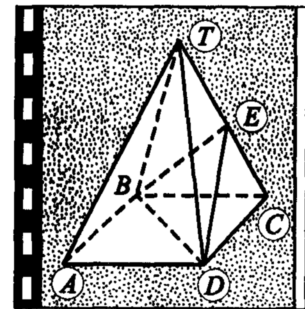
Цяпер можам знайсці $S_{ADC} = \frac{1}{2}DK \cdot AC = \frac{a^2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$ і

$S_{ADB} = \frac{1}{2}DE \cdot AB = \frac{1}{2}DK \cdot AB = \frac{a^2\sin\alpha}{4\cos\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$ (рыс. 97).

Поўная паверхня піраміды $S_{поўн} = 2S_{ADB} + S_{ADC} + S_{ABC} =$

$$= \frac{a^2\sin\alpha}{2\cos\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{a^2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{a^2\sin\alpha}{2} = \frac{a^2\sin\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right).$$

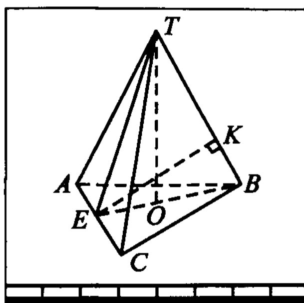
Задача 3. Знайдзіце косінус вугла паміж сумежнымі бакавымі гранямі правільнай чатырохвугольнай піраміды, у якой бакавы кант роўны старане асновы.



Рыс. 98

Рашэнне. Няхай пункт E – сярэдзіна канта TC. Паколькі трохвугольнікі DTC і BTC роўнастароннія, то $DE \perp TC$ і $BE \perp TC$ (рыс. 98). Значыць, $\angle BED = \alpha$ – шукаемы. Абазначым даўжыню канта піраміды праз x. У прамавугольным трохвугольніку DEC катэт $DE = \sqrt{DC^2 - EC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. З трохвугольніка BED па тэарэме косінусаў знаходзім $\cos\alpha$: $BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BE \cdot ED\cos\alpha$, $2x^2 = \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - 2\frac{3x^2}{4}\cos\alpha$, адкуль $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

Задача 4. Знайдзіце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, бакавыя канты якой нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α і аддалены ад сярэдзіны процілеглай стараны асновы на адлегласці a.

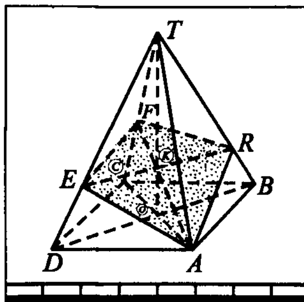


Рыс. 99

Рашэнне. Няхай пункт E – сярэдзіна канта AC, тады $BE \perp AC$. Адрэзак TO – вышыня піраміды, дзе пункт O – цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC. Правядзём $EK \perp TB$. Па ўмове $EK = a$, $\angle TBE = \alpha$ (рыс. 99).
У прамавугольным трохвугольніку BKE знаходзім $BE = \frac{a}{\sin a}$, $KB = a \operatorname{ctg} \alpha$. Абазначым праз x даўжыню стараны асновы піраміды. З прамавугольнага трохвугольніка BEC знаходзім катэт $BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Такім чынам, $\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sin\alpha}$, $x = \frac{2a}{\sqrt{3}\sin\alpha}$.

Цяпер знаходзім $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{a^2}{\sqrt{3}\sin^2\alpha}$. Трохвугольнікі TOB і EKB падобныя ($\angle TBE = \angle KBE = \alpha$, $\angle TOB = \angle EKB = 90°$), значыць, $EK : TO = KB : BO$, адкуль $TO = \frac{EK \cdot BO}{KB} = \frac{2a}{3\cos\alpha}$. Такім чынам, аб'ём піраміды $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot TO = \frac{2\sqrt{3}a^3}{27\sin^2\alpha\cos\alpha}$.

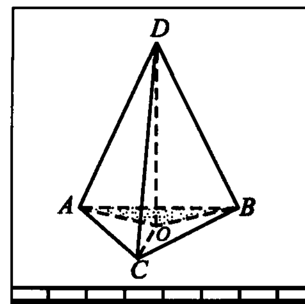
Задача 5. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе старана асновы роўная 8, а вугал нахілу бакавога канта да плоскасці асновы роўны 60°. Праз вяршыню асновы паралельна процілеглай ёй дыяганалі праведзена сякучая плоскасць так, што вышыня піраміды дзеліцца пунктам перасячэння з гэтай плоскасцю ў адносіне 1 : 2, калі лічыць ад асновы. Знайдзіце плошчу сячэння.



Рыс. 100

Рашэнне. Па ўмове аснова вышыні TO піраміды $ABCDT$ супадае з цэнтрам O квадрата $ABCD$, $AB = 8$, $\angle TAC = 60°$. Праз пункт K, які належыць адрэзку OT ($KO : KT = 1 : 2$), правядзём ER паралельна DB (рыс. 100). Няхай F – пункт перасячэння прамой AK і канта CT, тады $AEFR$ – дадзенае сячэнне. Па тэарэме Піфагора з трохвугольніка ADC знаходзім $AC = \sqrt{DC^2 + DA^2} = 8\sqrt{2}$ (см). У прамавугольным трохвугольніку AOT катэт $TO = AO \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{6}$ (см). Паколькі трохвугольнік ATC роўнастаронні ($TC = TA$, $\angle TCA = \angle CAT = 60°$), то $AF = TO = 4\sqrt{6}$ (см). Трохвугольнікі TDB і TER падобныя ($\angle TER = \angle TDB$, $\angle ETR = \angle DTB$), значыць, $TO : TK = DB : ER$, адкуль $ER = \frac{TK \cdot DB}{TO} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ (см). Паколькі $AF \perp ER$, то $S_{AEFR} = \frac{1}{2} AF \cdot ER = \frac{64\sqrt{3}}{3}$ (см²).

Задача 6. Дакажыце, што для любога тэтраэдра $ABCD$, плоскія вуглы якога пры вяршыні D прамыя, выконваецца роўнасць $S^2_{ADB} = S_{AOB} \cdot S_{ACB}$, дзе пункт O – аснова вышыні, праведзенай з вяршыні D.

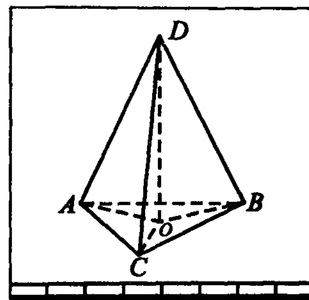


Рыс. 101

Доказ. Трохвугольнік AOB з'яўляецца артаганальнай праекцыяй трохвугольніка ADB на плоскасць ABC. Значыць, $\cos\alpha = \frac{S_{AOB}}{S_{ADB}}$, дзе α – вугал паміж плоскасцямі ADB і ABC. Трохвугольнік ADB – артаганальная праекцыя трохвугольніка ACB на плоскасць ADB. Значыць, $\cos\alpha = \frac{S_{ADB}}{S_{ACB}}$.

Параўноўваючы атрыманыя роўнасці, маем $\frac{S_{AOB}}{S_{ADB}} = \frac{S_{ADB}}{S_{ACB}}$, або $S^2{}_{ADB} = S_{AOB} \cdot S_{ACB}$ (рыс. 101).

Задача 7. Дакажыце, што для любога тэтраэдра $ABCD$, плоскія вуглы якога пры вяршыні D прамыя, выконваецца роўнасць $S^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2$, дзе S_1, S_2, S_3 – плошчы бакавых граняў, а S – плошча грані, якая ляжыць супраць вяршыні D.



Рыс. 102

Доказ. Абазначым $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{ADB}$, $S_2 = S_{ADC}$, $S_3 = S_{BDC}$. Няхай пункт O – аснова вышыні, апушчанай з вяршыні D. Тады справядлівыя роўнасці $S_1^2 = S_{ABO} \cdot S$, $S_2^2 = S_{AOC} \cdot S$, $S_3^2 = S_{BOC} \cdot S$. Складваючы пачленна гэтыя роўнасці, атрымліваем $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = (S_{ABO} + S_{AOC} + S_{BOC})S = S^2$ (рыс. 102).

Задача 8. Дакажыце, што для любога тэтраэдра $ABCD$, плоскія вуглы якога пры вяршыні D прамыя, выконваецца роўнасць $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, дзе a, b, c – даўжыні ўзаемна перпендыкулярных бакавых кантаў, H – даўжыня вышыні, апушчанай з вяршыні D на аснову ABC.

Доказ. Аб'ём тэтраэдра $ABCD$ вызначаецца формуламі $V = \frac{1}{6}abc$, $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot H$. Паколькі $S_{ABC} = \sqrt{S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2}$, то $\frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}H\sqrt{S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2}$. Такім чынам, $a^2b^2c^2 = H^2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. Адсюль вынікае, што $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

3.2. Задачы

1. Кожны бакавы кант чатырохвугольнай піраміды ўтварае з вышынёй вугал α. Аснова піраміды – прамавугольнік з вуглом β паміж дыяганалямі. Знайдзіце аб'ём піраміды, калі яе вышыня роўная h.

2. Бакавы кант правільнай чатырохвугольнай піраміды ўтварае з вышынёй піраміды вугал $45°$. Даўжыня бакавога канта роўная 2 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды.

3. Асновай піраміды служыць трапецыя, бакавыя стораны і меншая аснова якой роўныя b, а востры вугал роўны α. Бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вуглом φ. Знайдзіце аб'ём піраміды.

4. Асновай піраміды з'яўляецца прамавугольнік з меншай старaной a і вуглом паміж дыяганалямі α. Знайдзіце аб'ём піраміды, калі ўсе бакавыя канты ўтвараюць з плоскасцю асновы вугал β.

5. Бакавы кант правільнай трохвугольнай піраміды роўны a і ўтварае з плоскасцю асновы вугал α. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

6. Аснова піраміды – трохвугольнік, дзве стараны якога a і b, а вугал паміж імі $120°$. Кожны бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α. Знайдзіце аб'ём піраміды.

7. Асновай піраміды служыць раўнабедраны трохвугольнік, роўныя стораны якога маюць даўжыню b і ўтвараюць вугал α. Кожны з бакавых кантаў піраміды ўтварае з вышынёй піраміды вугал φ. Знайдзіце аб'ём піраміды.

8. Плошча асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная S, вышыня піраміды ўтварае з бакавым кантам піраміды вугал α. Знайдзіце плошчу паверхні сферы, дыяметр якой роўны вышыні дадзенай піраміды.

9. Адносіна плошчы дыяганальнага сячэння правільнай чатырохвугольнай піраміды да плошчы яе асновы роўная $\sqrt{3}$. Знайдзіце вугал нахілу бакавога канта піраміды да плоскасці яе асновы.

10. Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём правільнай чатырохвугольнай піраміды, калі старана асновы a, дыяганальнае сячэнне роўнавялікае аснове.

11. Плошча бакавой паверхні правільнай трохвугольнай піраміды ў a разоў большая за плошчу яе асновы. Знайдзіце плоскі вугал пры вяршыні гэтай піраміды.

12. Бакавая паверхня правільнай трохвугольнай піраміды ў 5 разоў большая за плошчу яе асновы. Знайдзіце плоскі вугал пры вяршыні піраміды.

13. Знайдзіце плоскі вугал пры вяршыні правільнай трохвугольнай піраміды, калі гэты вугал роўны вуглу паміж бакавым кантам і плоскасцю асновы піраміды.

14. Плоскі вугал пры вяршыні правільнай шасцівугольнай піраміды роўны вуглу паміж бакавым кантам і плоскасцю асновы. Знайдзіце гэты вугал.

15. Вылічыце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, калі вядома, што плоскі вугал пры вяршыні роўны α, а радыус акружнасці, апісанай каля бакавой грані, роўны r.

16. Аснова піраміды – прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 5 і 12. Усе двухгранныя вуглы пры аснове піраміды роўныя $60°$. Знайдзіце вышыню піраміды.

17. У аснове піраміды ляжыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай c і вострым вуглом α. Кожная бакавая грань утварае з плоскасцю асновы вугал β. Знайдзіце аб'ём піраміды.

18. Плоскі вугал пры вяршыні правільнай чатырохвугольнай піраміды роўны α, а вышыня – h. Знайдзіце аб'ём піраміды.

19. У правільнай трохвугольнай пірамідзе бакавы кант роўны 8, а плоскі вугал пры вяршыні $45°$. Знайдзіце поўную паверхню піраміды.

20. Дыяганаль квадрата, які ляжыць у аснове правільнай чатырохвугольнай піраміды, роўная яе бакавому канту і роўная a. Знайдзіце поўную паверхню піраміды і яе аб'ём.

21. Вылічыце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды вышынёй h, калі вядома, што адносіна бакавой паверхні піраміды да плошчы асновы роўная k.

22. Асновай піраміды служыць паралелаграм, у якога стораны роўныя 10 см і 18 см, а плошча роўная 90 см^2. Вышыня піраміды праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і роўная 6 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні гэтай піраміды.

23. Адлегласць ад цэнтра асновы правільнай трохвугольнай піраміды да яе бакавой грані роўная a. Двухгранны вугал пры аснове роўны φ. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды.

24. Знайдзіце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, калі бакавая грань нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α і аддалена ад процілеглай вяршыні на адлегласць a.

25. Старана асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная a, а вышыня, якая апушчана з вяршыні асновы на процілеглую ёй бакавую грань, роўная b. Знайдзіце аб'ём піраміды.

26. Старана асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная a. Бакавая грань нахілена да плоскасці асновы пад вуглом $45°$. Знайдзіце аб'ём і плошчу поўнай паверхні піраміды.

27. Вугал паміж бакавой гранню і плоскасцю асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўны $45°$. Аб'ём піраміды роўны $\frac{1}{3}$ м^3. Знайдзіце даўжыню стараны асновы.

28. У правільнай трохвугольнай пірамідзе двухгранны вугал пры аснове роўны α. Знайдзіце вугал нахілу бакавога канта да плоскасці асновы.

29. Аснова піраміды $HABCD$ – прамавугольнік $ABCD$, у якім $AB = CD$, $AB = 2AD$. Грань HAD з'яўляецца раўнабедраным трохвугольнікам і перпендыкулярная плоскасці асновы піраміды, грань HBC нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α. Знайдзіце велічыні вуглоў, якія ўтвараюць бакавыя канты піраміды з плоскасцю яе асновы.

30. Знайдзіце велічыню двухграннага вугла паміж бакавымі гранямі правільнай трохвугольнай піраміды, калі двухгранны вугал, які ўтварае бакавая грань з асновай, роўны α.

31. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе двухгранны вугал пры аснове роўны α. Знайдзіце двухгранны вугал пры бакавым канце.

32. У правільнай трохвугольнай пірамідзе праз старану асновы і сярэдзіну процілеглага бакавога канта праведзена плоскасць, якая аказалася перпендыкулярнай гэтаму канту. Знайдзіце вышыню бакавой грані піраміды, калі старана асновы роўная 1 дм.

33. Старана асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная a, бакавы кант роўны b. Знайдзіце яе аб'ём і плошчу сячэння, якое праходзіць праз старану асновы перпендыкулярна бакавому канту, процілегламу гэтай старане.

34. У правільнай трохвугольнай пірамідзе вядомы вышыня H і велічыня двухграннага вугла 2α, утворанага бакавымі гранямі. Знайдзіце даўжыню стараны асновы.

35. З сярэдзіны стараны асновы правільнай трохвугольнай піраміды апушчаны перпендыкуляр на бакавы кант, роўны a. Знайдзіце вышыню піраміды, калі двухгранны вугал паміж яе бакавымі гранямі роўны 2β.

36. Плоскі вугал пры вяршыні правільнай чатырохвугольнай піраміды роўны вуглу яе канта з плоскасцю асновы. Вылічыце аб'ём піраміды, калі старана асновы роўная 1.

37. Асновай піраміды з'яўляецца ромб, старана якога роўная a, востры вугал – α. Кожны з двухгранных вуглоў пры кантах асновы роўны φ. Знайдзіце аб'ём піраміды.

38. Асновай піраміды служыць ромб са стараной, роўнай 6 см і вострым вуглом $30°$. Двухгранныя вуглы пры аснове роўныя $60°$. Знайдзіце поўную паверхню піраміды.

39. Бакавая грань правільнай чатырохвугольнай піраміды нахілена да плоскасці асновы пад вуглом $60°$. Старана асновы 2 см. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

40. Вугал паміж бакавым кантам і асновай правільнай чатырохвугольнай піраміды роўны $60°$, бакавы кант роўны a. Праз сярэдзіну аднаго з бакавых кантаў перпендыкулярна яму праведзена плоскасць. Знайдзіце плошчу сячэння.

41. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе старана асновы роўная 10 см, а вугал нахілу бакавога канта да плоскасці асновы роўны $60°$. Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыню асновы перпендыкулярна процілегламу канту.

42. Бакавыя грані піраміды, у аснове якой раўнабедраная трапецыя з вышынёй h, аднолькава нахілены да плоскасці асновы. З вяршыні піраміды апушчаны перпендыкуляры на бакавыя стораны трапецыі і асновы іх злучаны. У атрыманым трохвугольным сячэнні вугал пры вяршыні роўны α, а плошча сячэння роўная S. Знайдзіце аб'ём піраміды.

43. Дадзена чатырохвугольная піраміда, асновай якой з'яўляецца квадрат і адзін з кантаў якой перпендыкулярны плоскасці асновы. У гэту піраміду ўпісаны куб так, што ніжняя аснова куба ляжыць на аснове піраміды, а стораны верхняй асновы куба ляжаць на бакавых гранях піраміды. Знайдзіце аб'ём піраміды, калі яе бакавая грань нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α, а кант куба роўны a.

44. Пабудуйце сячэнне правільнай чатырохвугольнай піраміды плоскасцю, праведзенай праз сярэдзіны двух сумежных бакавых кантаў паралельна вышыні піраміды. Вылічыце плошчу сячэння, калі бакавы кант роўны 18 см, а дыяганаль асновы – $16\sqrt{2}$ см.

45. Вышыня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 8 см, старана асновы роўная 12 см. Вылічыце плошчу сячэння, праведзенага праз цэнтр асновы паралельна бакавой грані піраміды.

46. Трохвугольная піраміда $ABCD$ перасякаецца з плоскасцю α па чатырохвугольніку $EFKH$ так, што вяршыні E і F ляжаць на кантах AB і AC. Адносіна старон EF і EH роўная 3. Вядома, што плоскасць α паралельна процілеглым кантам AD і BC, адносіна якіх роўная 1 : 3. Знайдзіце адносіну, у якой пункт E дзеліць кант AB.

47. Вышыня правільнай чатырохвугольнай піраміды ўтварае з бакавой гранню вугал $30°$. Праз старану асновы піраміды пра-

ведзена плоскасць, перпендыкулярная процілеглай грані. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў мнагаграннікаў, атрыманых пры перасячэнні піраміды гэтай плоскасцю.

48. Праз вяршыню правільнай трохвугольнай піраміды і сярэдзіны дзвюх старон асновы праведзена сячэнне. Знайдзіце плошчу сячэння і аб'ём піраміды, калі вядомы старана асновы a і вугал α паміж сячэннем і асновай.

49. У правільным тэтраэдры $TABC$ праз яго вяршыню T праведзена плоскасць, перпендыкулярная плоскасці ABC і паралельная AB. Знайдзіце плошчу сячэння тэтраэдра плоскасцю, калі кант тэтраэдра мае даўжыню a.

50. Асновай піраміды з'яўляецца правільны трохвугольнік: адна з бакавых граняў перпендыкулярная аснове, а дзве іншыя нахілены да яе пад вуглом α. Як нахілены да плоскасці асновы бакавыя канты?

51. Асновай піраміды $TABC$ з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік ABC. Бакавая грань TAB перпендыкулярная аснове, а дзве іншыя нахілены да асновы пад вуглом β. Знайдзіце вугал паміж плоскасцю асновы і кантам TC.

52. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды $TABC$ роўныя b, вуглы пры яе вяршыні роўныя наступным велічыням: $\angle ATB = \angle ATC = \frac{\pi}{3}$, $\angle BTC = \frac{\pi}{2}$. Знайдзіце вышыню піраміды.

53. Усе бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўтвараюць з плоскасцю асновы адзін і той жа вугал, роўны аднаму з вострых вуглоў, які ляжыць у аснове прамавугольнага трохвугольніка. Знайдзіце гэты вугал, калі гіпатэнуза трохвугольніка роўная c, а аб'ём піраміды роўны V.

54. Знайдзіце аб'ём піраміды, асновай якой служыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай даўжынёй 6 см і вострым вуглом велічынёй у $30°$, калі бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вуглом $45°$.

55. Асновай трохвугольнай піраміды служыць роўнастаронні трохвугольнік, а двухгранныя вуглы пры аснове роўныя α, α і $\frac{\pi}{2}$. Знайдзіце аб'ём піраміды, калі вядома, што яе вышыня роўная H.

56. У аснове чатырохвугольнай піраміды ляжыць квадрат. Адзін з бакавых кантаў піраміды перпендыкулярны аснове. Знайдзіце аб'ём піраміды, калі яе найбольшы бакавы кант роўны l, а адрэзак, які злучае цэнтр асновы з вяршыняй, роўны b.

57. Аснова піраміды – прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 5 см і 12 см. Кожны бакавы кант піраміды роўны 13 см. Знайдзіце аб'ём піраміды.

58. Бакавыя канты правільнай трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя і роўныя a. Знайдзіце аб'ём піраміды.

59. Асновай чатырохвугольнай піраміды $TABCD$ служыць квадрат $ABCD$, а вышыня піраміды супадае з кантам TB. Знайдзіце вышыню піраміды, калі радыус упісанага ў піраміду шара роўны 3 см, а старана квадрата $ABCD$ роўная 15 см.

60. У аснове трохвугольнай піраміды $TABC$ ляжыць правільны трохвугольнік ABC. Бакавы кант піраміды TA перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце аб'ём піраміды, калі велічыня вугла паміж прамой TA і прамой, якая праходзіць праз пункт C і сярэдзіну канта TB, роўная $60°$, а адлегласць паміж гэтымі прамымі роўная 2 см.

61. Бакавыя канты правільнай трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце вугал нахілу бакавога канта да плоскасці асновы.

62. Бакавы кант правільнай чатырохвугольнай піраміды ўтварае са стараной асновы вугал α. Радыус шара, апісанага каля піраміды, роўны R. Знайдзіце бакавую паверхню гэтай піраміды.

63. У шар радыуса R упісана правільная трохвугольная піраміда, у якой двухгранны вугал пры аснове роўны α. Знайдзіце старану асновы піраміды.

64. У аснове піраміды ляжыць прамавугольнік. Кожны бакавы кант піраміды роўны a і ўтварае з сумежнымі старанамі трохвугольніка вуглы α і β. Знайдзіце аб'ём піраміды.

65. Асноваі чатырохвугольнай піраміды з'яўляецца ромб, старана якога роўная 6 см, а востры вугал – $60°$. Вяршыня піраміды праецыруецца ў пункт перасячэння дыяганалей ромба. Знайдзіце аб'ём піраміды, калі кант, праведзены да тупога вугла ромба, утварае з плоскасцю асновы вугал, роўны $60°$.

66. У правільную чатырохвугольную піраміду ўпісаны шар. Адлегласць ад цэнтра шара да вяршыні піраміды роўная a, а вугал нахілу бакавой грані да плоскасці асновы роўны α. Знайдзіце поўную паверхню піраміды.

67. У правільную трохвугольную піраміду ўпісаны шар. Знайдзіце вугал нахілу грані піраміды да плоскасці асновы, калі вядома, што адносіна аб'ёму піраміды да аб'ёму шара $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

68. Знайдзіце радыус шара, упісанага ў правільную чатырохвугольную піраміду са стараной асновы a і плоскім вуглом пры вяршыні, роўным α.

69. Каля шара апісана правільная чатырохвугольная піраміда, вышыня якой у 4 разы большая за дыяметр шара. Знайдзіце адносіна аб'ёму шара да аб'ёму піраміды.

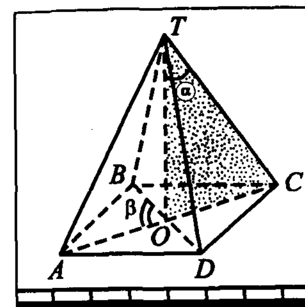
70. У правільнай трохвугольнай усечанай пірамідзе канты верхняй і ніжняй асноў адпаведна роўныя a і b ($a < b$), двухгранны вугал у канта ніжняй асновы роўны α. Знайдзіце аб'ём усечанай піраміды.

71. У правільнай чатырохвугольнай усечанай пірамідзе стораны асновы роўныя 5 см і 11 см, а дыяганаль піраміды 12 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды.

72. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ кант AB перпендыкулярны канту DC, даўжыня AB роўная a, даўжыня DC роўная b. Вуглы, утвораныя DC з гранямі ABC і ABD, роўныя α. Знайдзіце аб'ём піраміды.

3.3. Адказы і ўказанні

1. $\frac{2}{3}h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta$.



Рыс. 103

Указанне:

1) $TO = h, \angle CTO = \alpha, \angle BOA = \beta$ (рыс. 103);

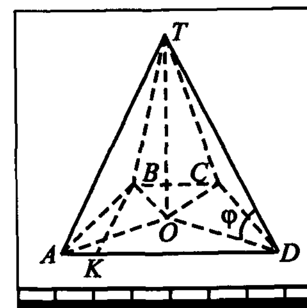
2) ΔTOC, $OC = h \operatorname{tg} \alpha$, $AC = 2OC = 2h \operatorname{tg} \alpha$;

3) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \beta = 2h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta$;

4) $V_{TABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot TO = \frac{2}{3} h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta$.

2. $4\sqrt{3}$ см².

3. $\frac{2}{3}b^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi$.



Рыс. 104

Указанне:

1) $AB = BC = CD = b$, $\angle BAD = \alpha$, пункт O – цэнтр апісанай каля трапецыі $ABCD$ акружнасці, $OD = R$ – радыус акружнасці, TO – вышыня, $\angle ODT = \varphi$, $BK \perp AD$;

2) ΔABK, $AK = b \cos \alpha$, $BK = b \sin \alpha$ (рыс. 104);

3) $AD = BC + 2AK = b + 2b \cos \alpha$;

4) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK = = 4b^2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$;

5) ΔABD, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\alpha \;\Rightarrow\; BD = 2b\cos\dfrac{\alpha}{2}$,

$2R = \dfrac{BD}{\sin\alpha}$ (тэарэма сінусаў), $R = \dfrac{b}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

6) ΔTOD, $TO = OD\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b\operatorname{tg}\varphi}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

7) $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot TO = \dfrac{2}{3}b^3\cos^3\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

4. $\dfrac{a^3\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{6\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

5. $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}\cos\alpha\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

Рыс. 105

Указанне:

1) Пункт O – цэнтр сіметрыі трохвугольніка ABC, $TO \perp (ABC)$, $TB = a$, $\angle OBT = \alpha$ (рыс. 105);

2) ΔTOB, $BO = a\cos\alpha$, $TO = a\sin\alpha$,

$OE = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{a\cos\alpha}{2}$;

3) ΔEOT,

$TE = \sqrt{TO^2 + OE^2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$;

4) $BE = 3OE = \dfrac{3a\cos\alpha}{2}$, $EC = BE\operatorname{ctg}60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cos\alpha$;

5) $S_{бак} = 3 \cdot EC \cdot TE = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}\cos\alpha\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

6. $\dfrac{ab\operatorname{tg}\alpha\sqrt{a^2+ab+b^2}}{12}$.

7. $\dfrac{1}{6}b^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\varphi$.

Рыс. 106

Указанне:

1) $AB = BC$, O – цэнтр апісанай акружнасці, R – яе радыус (рыс. 106);

2) $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC\sin\alpha}{2} = \dfrac{b^2}{2}\sin\alpha$;

3) ΔBEC, $EC = b\sin\dfrac{\alpha}{2}$,

$AC = 2EC = 2b\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $OC = R = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \dfrac{b}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

5) ΔTOC, $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{TO}{OC}$, $TO = \dfrac{b\operatorname{ctg}\varphi}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

6) $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot TO = \dfrac{1}{6}b^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\varphi$.

8. $\dfrac{4\pi S}{3\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha}$.

9. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$.

Рыс. 107

Указанне:

1) $\angle OCT = \varphi$ – шукаемы (рыс. 107);

2) $BC = x$, ΔADC, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} =$

$= x\sqrt{2}$, $OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$;

3) ΔTOC, $TO = OC\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\varphi$;

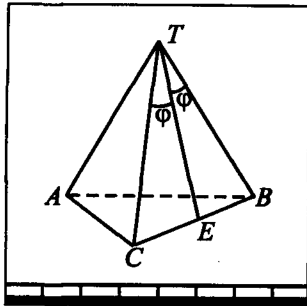
4) $S_{ATC} = \dfrac{TO \cdot AC}{2} = \dfrac{x^2\operatorname{tg}\varphi}{2}$;

5) $S_{ABCD} = AD \cdot DC = x^2$;

6) $\frac{S_{ATC}}{S_{ABCD}} = \sqrt{3}$, $\frac{\frac{x^2}{2}\operatorname{tg}\varphi}{x^2} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$.

10. $3a$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

11. $2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)$.



Рыс. 108

Указанне:

1) $CE = EB$, $\angle ETB = \varphi$, $\angle CTB = 2\varphi$, $BC = x$ (рыс. 108);

2) ΔTEB, $TE = \frac{x}{2\operatorname{tg}\varphi}$;

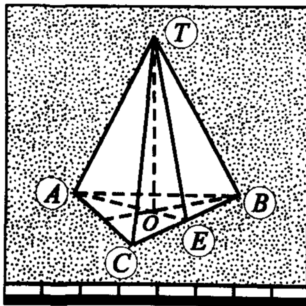
3) $S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{бак} = 3S_{CTB} = \frac{3x^2}{4\operatorname{tg}\varphi}$;

4) $\frac{S_{бак}}{S_{ABC}} = a$, $\frac{3x^2}{4\operatorname{tg}\varphi} : \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{a}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)$, $\angle CTB = 2\varphi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)$.

12. $2\operatorname{arcctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

13. $2\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{3}}$.



Рыс. 109

Указанне:

1) O – цэнтр сіметрыі ΔABC, $\angle CTB = \angle TBO = \alpha$, $CE = BE$, $BC = x$ (рыс. 109);

2) ΔTEB, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BE}{TB} = \frac{x}{2TB}$;

3) ΔTOB, $\cos\alpha = \frac{OB}{TB} = \frac{x\sqrt{3}}{3TB}$,

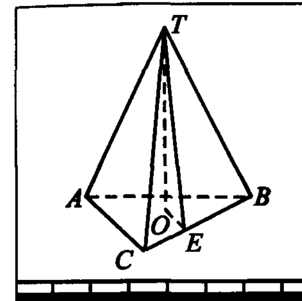
$TB = \frac{x\sqrt{3}}{3\cos\alpha}$;

4) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$,

$2\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} = 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

14. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **15.** $\frac{2}{3}r^3\sin^2\alpha\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha}$.

16. $2\sqrt{3}$.



Рыс. 110

Указанне:

1) $\angle ACB = 90°$, O – цэнтр акружнасці, упісанай у ΔABC, TO – вышыня піраміды, $OE \perp BC$, $\angle OET = 60°$;

2) ΔABC, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$;

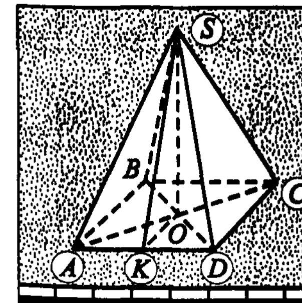
3) $OE = r$ – радыус акружнасці, упісанай у ΔABC, $r = p - AB$,

$p = \frac{AB + BC + CA}{2}$, $r = 2$ (рыс. 110);

4) ΔTOE, $TO = OE\operatorname{tg}60° = 2\sqrt{3}$.

17. $\frac{c^3\sin 2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)\operatorname{tg}\beta}{24}$.

18. $\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.



Рыс. 111

Указанне:

1) $AD = x$, $SO = h$, $AK = KD = \frac{x}{2}$ (рыс. 111);

2) ΔSKD, $SK = KD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

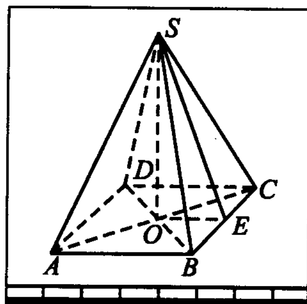
3) ΔSOK, $SK^2 = SO^2 + OK^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$;

4) $\frac{x^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = h^2 + \frac{x^2}{4}$, $x^2 = \frac{4h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$;

5) $V = \frac{1}{3}AD^2 \cdot OS = \frac{1}{3}x^2h = \frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

19. $48\sqrt{2} + 16\sqrt{3}(2-\sqrt{2})$.

20. $\frac{a^2}{2}(\sqrt{7}+1)$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Рыс. 112

Указанне:

1) $AC = SB = a$, $BE = EC$ (рыс. 112);

2) $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{a^2}{2} = AB^2$,

$AB = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

3) ΔSOB, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

4) ΔSOE, $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$,

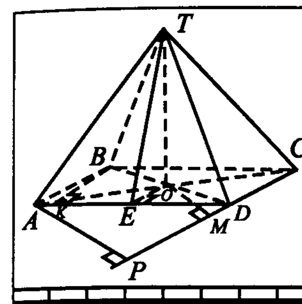
$S_{SBC} = \frac{1}{2}BC \cdot SE = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$;

5) $S_{поўн} = S_{бак} + S_{ABCD} = \frac{4a^2\sqrt{7}}{8} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{7}+1)$;

6) $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

21. $\frac{h^3\sqrt{3}}{k^2-1}$.

22. 192 см².



Рыс. 113

Указанне:

1) $OT = 6$, $AD = 18$, $DC = 10$, $AE = ED$, $BK \perp AD$, $OE \parallel BK$, $AP \perp CD$, $OT \perp ABC$, $OM \parallel AP$ (рыс. 113);

2) $S_{ABCD} = BK \cdot AD = DC \cdot AP = 90 \Rightarrow BK = 5$, $AP = 9$;

3) $OE = \frac{BK}{2} = \frac{5}{2}$, $OM = \frac{AP}{2} = \frac{9}{2}$;

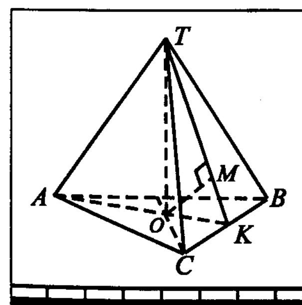
4) ΔTOE, $TE = \sqrt{OT^2 + OE^2} = \frac{13}{2}$,

$S_{ATD} = \frac{AD \cdot TE}{2} = \frac{117}{2}$;

5) ΔDTC, $TM = \sqrt{TO^2 + OM^2} = \frac{15}{2}$, $S_{TDC} = \frac{DC \cdot TM}{2} = \frac{75}{2}$;

6) $S_{бак} = 2S_{ATD} + 2S_{TDC} = 192$.

23. $\frac{6a^2\sqrt{3}}{\sin\varphi\sin 2\varphi}$.



Рыс. 114

Указанне:

1) $CK = KB$, $TK \perp CB$, $OM \perp TK$, $\angle AKT = \varphi$, O – цэнтр ΔABC, $OM = a$;

2) ΔOMK, $OK = \frac{OM}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi}$ (рыс. 114);

3) ΔTOK, $TK = \frac{OK}{\cos\varphi} = \frac{2a}{\sin 2\varphi}$,

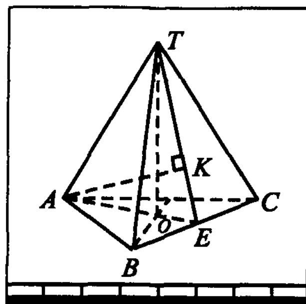
$AK = 3OK = \frac{3a}{\sin\varphi}$;

4) ΔAKC, $AC = \frac{AK}{\sin 60^\circ} = \frac{6a}{\sqrt{3}\sin\varphi}$;

5) $S_{бак} = 3S_{CTB} = 3\frac{1}{2}BC \cdot TK = \frac{6a^2\sqrt{3}}{\sin\varphi\sin 2\varphi}$.

24. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{27\sin^2\alpha\cos\alpha}$.

25. $\dfrac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$.



Рыс. 115

Указанне:

1) $BE = EC$, $AK \perp TE$, $BC = a$, $AK = b$ (рыс. 115);

2) ΔABE, $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$OE = \dfrac{AE}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

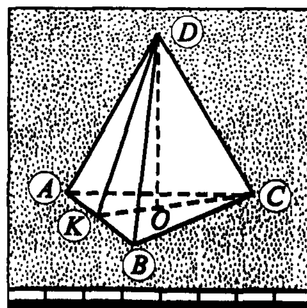
3) ΔAKE,

$KE = \sqrt{AE^2 - AK^2} = \dfrac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{2}$;

4) $\Delta AKE \sim \Delta TOE$, $TO : b = OE : KE \Rightarrow TO = \dfrac{ab\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2-4b^2}}$;

5) $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot TO = \dfrac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$.

26. $\dfrac{a^3}{24}$, $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)$.



Рыс. 116

Указанне:

1) $BC = a$, O – цэнтр асновы, $AK = KB$, $\angle DKO = 45°$, $DO \perp ABC$;

2) ΔCKB, $CK = \sqrt{CB^2 - KB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$OK = \dfrac{CK}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

3) ΔDOK, $OK = OD$, $KD = \dfrac{OK}{\cos 45°} =$

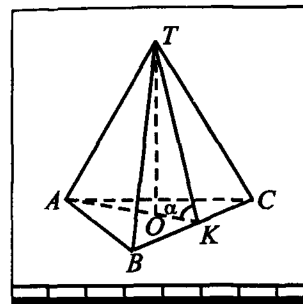
$= \dfrac{a}{\sqrt{6}}$, $S_{ADB} = \dfrac{AB\cdot KD}{2} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{6}}$;

4) $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot OD = \dfrac{a^3}{24}$ (рыс. 116);

5) $S_{поўн} = 3S_{ADB} + S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)$.

27. 2 м.

28. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.



Рыс. 117

Указанне:

1) $BK = KC$, $\angle TAK = \varphi$ – шукаемы, O – цэнтр ΔABC, $\angle TKO = \alpha$;

2) ΔTOK, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OT}{OK}$, $OT = OK\operatorname{tg}\alpha$;

3) ΔTOA,

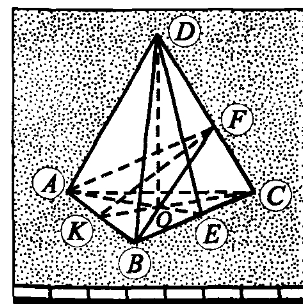
$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{OT}{OA} = \dfrac{OK\operatorname{tg}\alpha}{OA} = \dfrac{OK}{OA}\operatorname{tg}\alpha$;

4) $OK : OA = 1 : 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$,

$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$ (рыс. 117).

29. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha}{17}\right)$; $\operatorname{arctg}(4\operatorname{tg}\alpha)$.

30. $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3\cos^2\alpha+1}}{2}$.



Рыс. 118

Указанне:

1) $AK = KB$, $KF \perp DC$, $BE = EC$, O – цэнтр ΔABC, $\angle DEO = \alpha$, $BC = x$, $\angle AFB = \varphi$ – шукаемы (рыс. 118);

2) ΔAEB, $OE = \dfrac{AE}{3} = \dfrac{x}{2\sqrt{3}}$;

3) ΔDOE, $ED = \dfrac{OE}{\cos\alpha} = \dfrac{x}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$;

4) ΔDEB,

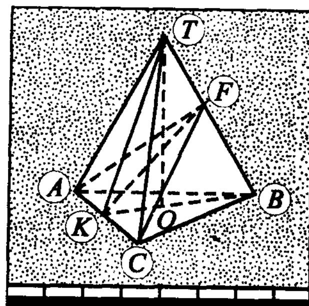
$BD = \sqrt{ED^2 + BE^2} = \dfrac{x\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$;

5) ΔFKB, $BF = \dfrac{KB}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{x}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$, $S_{BDC} = \dfrac{ED \cdot BC}{2}$, $S_{BDC} = \dfrac{DC \cdot BF}{2}$;

6) $ED \cdot BC = DC \cdot BF \Rightarrow 2\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$.

31. $\arccos(-\cos^2\alpha)$. **32.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ дм.

33. $\dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$, $\dfrac{a^2}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$.



Рыс. 119

Указанне:

1) $AK = KC$, $KF \perp TB$, $AFC \perp TB$, $TB = b$, $AB = a$, O – цэнтр ΔABC (рыс. 119);

2) ΔBKC, $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

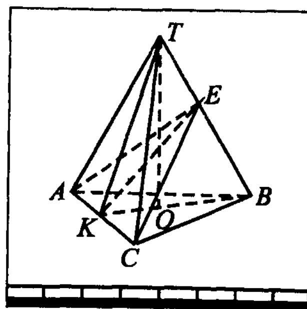
$OB = \dfrac{2BK}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

3) ΔTOB, $TO = \sqrt{TB^2 - OB^2} = \sqrt{\dfrac{3b^2 - a^2}{3}}$;

4) $V = \dfrac{S_{ABC} \cdot TO}{3} = \dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$;

5) $V = \dfrac{S_{AFC} \cdot TB}{3}$, такім чынам, $S_{AFC} = \dfrac{3V}{TB} = \dfrac{a^2}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

34. $H\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\alpha - 3}$.



Рыс. 120

Указанне:

1) $AK = KC$, $KE \perp TB$, $\angle AEC = 2\alpha$, $TO \perp ABC$, $TO = H$, $BC = x$ (рыс. 120);

2) ΔEKC, $KE = \dfrac{KC}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{x}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$;

3) ΔBKC, $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$;

4) $S_{TKB} = \dfrac{BK \cdot TO}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}H}{4}$;

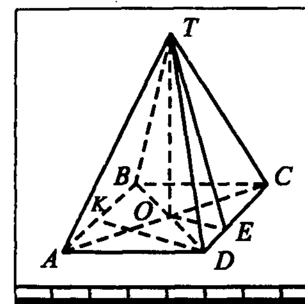
5) ΔTOB, $TB = \sqrt{TO^2 + OB^2} = \sqrt{H^2 + \dfrac{x^2}{3}}$;

6) $S_{TKB} = \dfrac{KE \cdot TB}{2} = \dfrac{x\sqrt{3H^2 + x^2}}{4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}$;

7) $\dfrac{x\sqrt{3}H}{4} = \dfrac{x\sqrt{3H^2 + x^2}}{4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha} \Rightarrow x = H\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\alpha - 3}$.

35. $\dfrac{2a\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\beta - 3}}$. **36.** $\dfrac{1}{6}\sqrt{\sqrt{5} + 1}$.

37. $\dfrac{a^3}{6}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$.



Рыс. 121

Указанне:

1) $AD = a$, $\angle BAD = \alpha$, $OE \perp DC$, $KD \parallel OE$, $\angle OET = \varphi$ (рыс. 121);

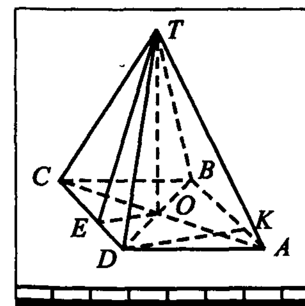
2) $OE = \dfrac{DK}{2} = \dfrac{a\sin\alpha}{2}$;

3) ΔTOE, $TO = OE\,\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{a}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$;

4) $S_{ABCD} = a^2\sin\alpha$;

5) $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot TO = \dfrac{a^3}{6}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

38. 54 см².



Рыс. 122

Указанне:

1) $OE \perp CD$, $DK \perp CD$, $\angle BAD = 30°$, $AD = 6$, $\angle OET = 60°$ (рыс. 122);

2) ΔDKA, $DK = AD\sin 30° = 3$;

3) $OE = \dfrac{DK}{2} = \dfrac{3}{2}$;

4) ΔOET, $TE = \dfrac{OE}{\cos 60°} = 3$;

5) $S_{ABCD} = AB \cdot AD\sin 30° = 18$, $S_{бак} = 4S_{TDC} = 2DC \cdot TE = 36$, $S_{поўн} = S_{ABCD} + S_{бак} = 54$.

39. 8 см².

40. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Рыс. 123

Указанне:

1) $BK = KT$, $KD \perp BT$, $P = OT \cap KD$, $P \in EF$, $EF \parallel AC$, $DEKF$ – шукаемае сячэнне (рыс. 123);

2) ΔTKD, $DK = \sqrt{TD^2 - TK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$TO = DK$, $TP = \frac{2TO}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

3) $\Delta ATC \sim \Delta ETF$, такім чынам,

$AC : EF = TO : TP = 3 : 2 \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$;

4) $S_{DEKF} = \frac{DK \cdot EF}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

41. $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ см².

42. $\frac{h^3\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha} - \frac{h^2}{4}}}{6\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$.

Рыс. 124

Указанне:

1) O – цэнтр упісанай у $ABCD$ акружнасці, $MO \perp ABCD$, $BK \perp AD$, $BK = h$, $\angle EMF = \alpha$, $S_{EMF} = S$, $EO = \frac{BK}{2} = \frac{h}{2}$ (рыс. 124);

2) ΔMEF,

$2S = ME^2 \sin\alpha$, $ME = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$;

3) ΔMOE, $OM = \sqrt{ME^2 - EO^2} = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha} - \frac{h^2}{4}}$;

4) ΔEMN, $EN = EM\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$;

5) $\Delta ABK \sim \Delta ENO$, $AB : BK = EO : EN \Rightarrow$

$AB = \frac{h^2}{2EN} = \frac{h^2}{2\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$;

6) $S_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\cdot BK}{2} = \frac{(AB+CD)\cdot BK}{2} = \frac{2AB\cdot BK}{2} =$

$= AB \cdot BK = \frac{h^3}{2\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$;

7) $V = S_{ABCD}\cdot\frac{MO}{3} = \frac{h^3\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha} - \frac{h^2}{4}}}{6\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$.

43. $\frac{a^3(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2(1+\operatorname{tg}\alpha)}{3}$.

Рыс. 125

Указанне:

1) $PO = a$, $\angle TAB = \alpha$ (рыс. 125);

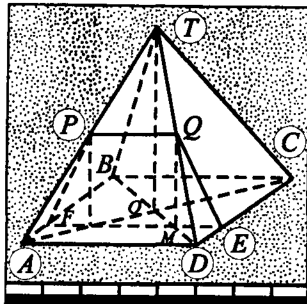
2) ΔAOP, $AO = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$;

3) $AB = AO + OB = a(1+\operatorname{ctg}\alpha)$;

4) ΔABT,
$TB = AB\operatorname{tg}\alpha = a(1+\operatorname{ctg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha$;

5) $V = \frac{1}{3}S_a \cdot TB = \frac{a^3(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2(1+\operatorname{tg}\alpha)}{3}$.

44. 84 см².



Рыс. 126

Указанне:

1) $TQ = QD$, $TP = PA$, $QM \parallel TO$, $EF \parallel AD$, $M \in EF$, $PQEF$ – трапецыя, шукаемае сячэнне (рыс. 126);

2) $BD = 16\sqrt{2}$, $TD = 18$, ΔBCD, $DC = x$, $BD^2 = 2x^2$, $x = 16$;

3) $PQ = \dfrac{AD}{2}$, $EF = AD = 16$;

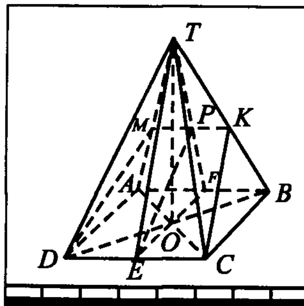
4) ΔTOD,

$TO = \sqrt{TD^2 - OD^2} = 14$, $MQ = \dfrac{TO}{2} = 7$;

5) $S_{PQEF} = \dfrac{(PQ + EF) \cdot MQ}{2} = 84$.

45. 45 см². **46.** 1.

47. 3 : 5.



Рыс. 127

Указанне:

1) $DKMC$ – сячэнне (трапецыя), F, E – сярэдзіны старон AB і CD, O – цэнтр квадрата $ABCD$, $\angle OTF = 30°$;

2) $TF = TE$, $\angle ETF = 60°$ $\Rightarrow$ ΔETF – роўнастаронні (рыс. 127);

3) $AB = AD = EF = x$, $MK = \dfrac{x}{2}$,

$PE = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$;

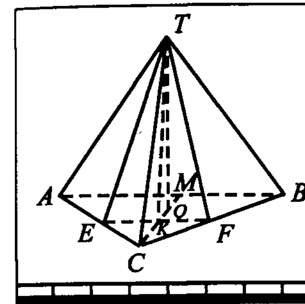
4) $TP \perp DMKC$, $V_{TDMKC} = \dfrac{TP \cdot S_{DMKC}}{3}$, $TP = \dfrac{x}{2}$,

$S_{DMKC} = \dfrac{(MK + DC)PE}{2} = \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{8}$, $V_{TMDCK} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{16}$;

5) $V_{TABCD} = \dfrac{S_{ABCD} \cdot TO}{3} = \dfrac{x^3\sqrt{3}}{6}$;

6) $V_{TCDMK} : V_{ABCDMK} = V_{TCDMK} : (V_{TABCD} - V_{TCDMK}) = 3 : 5$.

48. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$, $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{48}$.



Рыс. 128

Указанне:

1) O – цэнтр ΔABC, $AE = EC$, $CF = FB$, $K = CO \cap EF$, $\angle TKO = \alpha$ (рыс. 128);

2) ΔCMB, $CM = \sqrt{BC^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

3) $OK = CO - CK = \dfrac{2}{3}CM - \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$;

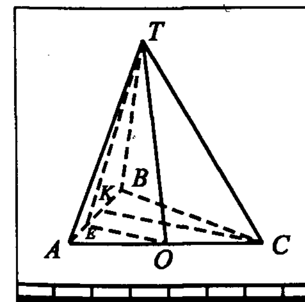
4) ΔTOK, $TO = OK \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{12}$,

$TK = \dfrac{OK}{\cos\alpha} = \dfrac{a\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$;

5) $S_{ETF} = \dfrac{1}{2}EF \cdot TK = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$, $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot TO = \dfrac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{48}$.

49. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{9}$.

50. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.



Рыс. 129

Указанне:

1) $AO = OC$, $OE \perp AB$, $TO \perp ABC$, $\angle TEO = \alpha$, $\angle TBO = \varphi$, $\angle TCO = \angle TAO = \gamma$, $AC = a$ (рыс. 129);

2) ΔAOE, $\angle EAO = 60°$,

$OE = AO\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;

3) ΔEOT, $OT = OE\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4}$;

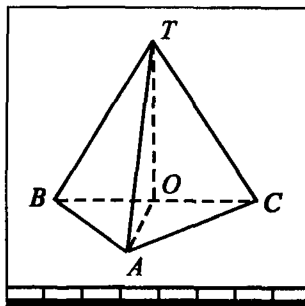
4) ΔAOT, $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{OT}{AO} = \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2} \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$;

5) ΔAOB, $OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

6) ΔTOB, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{OT}{OB} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

51. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

52. $\dfrac{b}{\sqrt{2}}$.



Рыс. 130

Указанне:

1) $TB = TA = TC = b$, $\angle BTC = \dfrac{\pi}{2}$,

$\angle BTA = \angle ATC = \dfrac{\pi}{3}$ (рыс. 130);

2) ΔBTA, $BA = b$, ΔATC, $AC = b$;

3) ΔBTC, $BC = \sqrt{BT^2 + TC^2} = b\sqrt{2}$;

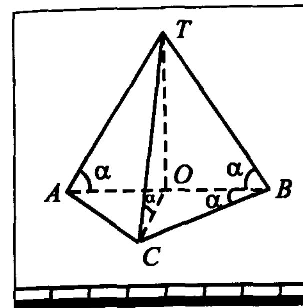
4) ΔBAC – прамавугольны,

$\angle BAC = 90°$, паколькі. $BC^2 = BA^2 + AC^2$;

5) $TO \perp (ABC)$, O – сярэдзіна гіпатэнузы BC, такім чынам,

$TO = \sqrt{TC^2 - OC^2} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

53. $\arcsin\sqrt{\dfrac{12V}{c^3}}$.



Рыс. 131

Указанне:

1) $AO = OB$, $AB = c$, $TO \perp (ABC)$, $\angle TCO = \angle ABC = \alpha$ – шукаемы (рыс. 131);

2) ΔTBO, $TO = OB\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{c\operatorname{tg}\alpha}{2}$;

3) ΔABC, $AC = AB\sin\alpha = c\sin\alpha$,

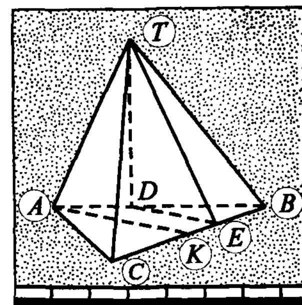
$BC = AB\cos\alpha = c\cos\alpha$;

4) $V = \dfrac{S_{ABC}\cdot TO}{3} = \dfrac{c^3\sin^2\alpha}{12}$,

$\sin^2\alpha = \dfrac{12V}{c^3}$, $\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{12V}{c^3}}$.

54. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

55. $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}H^3\operatorname{ctg}^2\alpha$.



Рыс. 132

Указанне:

1) $AD = DB$, $TD \perp (ABC)$, $DE \perp BC$,

$TD = H$, $\angle TED = \alpha$, $BC = x$ (рыс. 132);

2) ΔTDE, $DE = DT\operatorname{ctg}\alpha = H\operatorname{ctg}\alpha$;

3) ΔABC, $S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$,

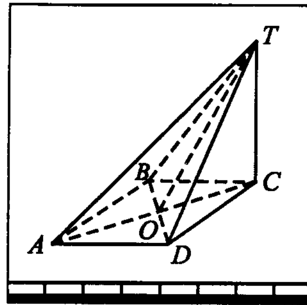
$S_{ABC} = DE\cdot BC = xH\operatorname{ctg}\alpha$,

$\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = xH\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow x = \dfrac{4H\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}$,

$S_{ABC} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}H^2\operatorname{ctg}^2\alpha$;

4) $V = \dfrac{S_{ABC}\cdot H}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}H^3\operatorname{ctg}^2\alpha$.

56. $\frac{2\sqrt{3}}{27}(l^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - l^2}$.



Рыс. 133

Указание:

1) $TC \perp (BCD)$, $TA = l$, $TO = b$ (рыс. 133);

2) $OC = x$, ΔTCO, $TC^2 = TO^2 - OC^2 = b^2 - x^2$, $AC = 2OC = 2x$, ΔTCA, $TC^2 = AT^2 - AC^2 = l^2 - 4x^2$, $b^2 - x^2 = l^2 - 4x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}$;

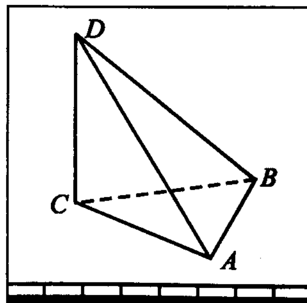
3) ΔTCO, $TC = \sqrt{TO^2 - OC^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - l^2}}{\sqrt{3}}$;

4) $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \sin 90°}{2} = \frac{2(l^2 - b^2)}{3}$;

5) $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot TC = \frac{2\sqrt{3}}{27}(l^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - l^2}$.

57. $65\sqrt{3}$ см³.

58. $\frac{a^3}{6}$.



Рыс. 134

Указание:

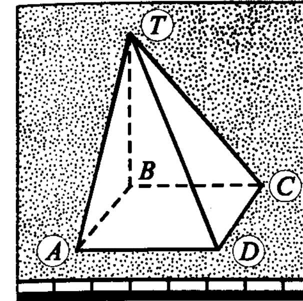
1) $\angle DCB = \angle DCA = \angle BCA = 90°$, $CD = CA = CB = a$ (рыс. 134);

2) $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DC$;

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{a^2}{2}$;

4) $V = \frac{1}{3} \frac{a^2}{2} a = \frac{a^3}{6}$.

59. 8 см.



Рыс. 135

Указание:

1) $TB \perp (ABCD)$, $TA \perp AD$, $TC \perp DC$, $AB = 15$, $r = 3$, $TB = x$ (рыс. 135);

2) $V_{TABCD} = \frac{S_{ABCD} \cdot TB}{3} = 75x$;

3) $V_{TABCD} = \frac{rS_{поўн}}{3}$,

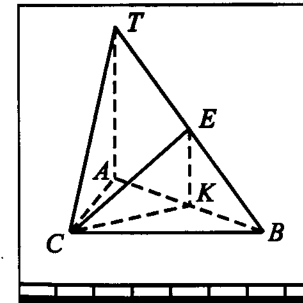
$S_{поўн} = 2S_{ABT} + 2S_{TAD} + S_{ABCD}$,

$2S_{ABT} = AB \cdot BT = 15x$,

$2S_{ATD} = AD \cdot TA = 15\sqrt{x^2 + 15^2}$, $S_{ABCD} = 225$;

4) $75x = 15x + 15\sqrt{x^2 + 15^2} + 225$, $TB = 8$.

60. $\frac{16}{\sqrt{3}}$ см³.



Рыс. 136

Указание:

1) $TA \perp (ABC)$, $BE = ET$, $EK \parallel TA$, $\angle CEK = 60°$, $AK = 2$ (рыс. 136);

2) $AB = 2AK = 4$,

$S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$;

3) ΔBKC, $\angle BKC = 90°$,

$CK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = 2\sqrt{3}$;

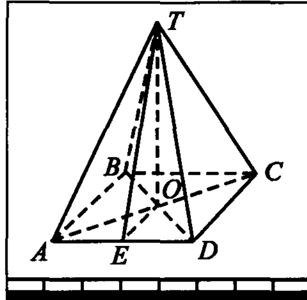
4) ΔCKE, $\angle CKE = 90°$,

$EK = CK \operatorname{ctg} 60° = 2$;

5) $TA = 2EK = 4$, $V = \frac{S_{ABC} \cdot TA}{3} = \frac{16}{\sqrt{3}}$.

61. $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

62. $-4R^2\sin 4\alpha$.



Рыс. 137

Указание:

1) $TO\perp(ABC)$, $AE = ED$, R – радыус шара, $\angle TAE = \alpha$, $AD = x$ (рыс. 137);

2) ΔAET, $TE = AE\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{x}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$;

3) ΔEOT,

$$TO = \sqrt{TE^2 - OE^2} = \frac{x\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}{2\cos\alpha};$$

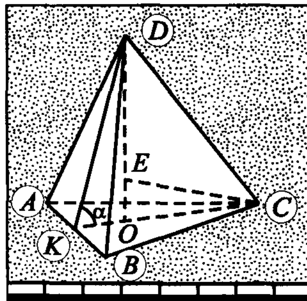
4) $R = \dfrac{AT\cdot TC\cdot AC}{4S_{ATC}} = \dfrac{AT^2}{2OT} =$

$= \dfrac{x}{4\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}$, $x = 4R\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$;

5) $S_{бак} = 4S_{ATD} = 2AD\cdot TE = 16R^2\cos\alpha\sin\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) =$

$= -4R^2\sin 4\alpha$.

63. $\dfrac{4R\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + 4}$.



Рыс. 138

Указание:

1) $AK = KB$, O – цэнтр ΔABC, $\angle DKC = \alpha$, E – цэнтр шара, R – радыус шара, $BC = x$ (рыс. 138);

2) ΔCKB,

$KC = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $OK = \dfrac{KC}{3} = \dfrac{x}{2\sqrt{3}}$;

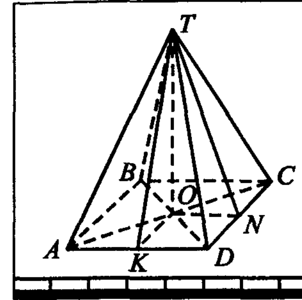
3) ΔDOK, $DO = OK\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}$,

$DO = DE + OE = R + OE$;

4) ΔEOC, $OE = \sqrt{EC^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{3}}$;

5) $\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}} = R + \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{3}}$, $BC = \dfrac{4R\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + 4}$.

64. $\dfrac{4}{3}a^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$.



Рыс. 139

Указание:

1) $TD = a$, $DK = KA$, $DN = NC$, $\angle TDN = \alpha$, $\angle TDK = \beta$ (рыс. 139);

2) ΔTKD, $TK = TD\sin\beta = a\sin\beta$, $KD = a\cos\beta$;

3) ΔTND, $ND = a\cos\alpha$, $OK = DN$;

4) ΔTOK,

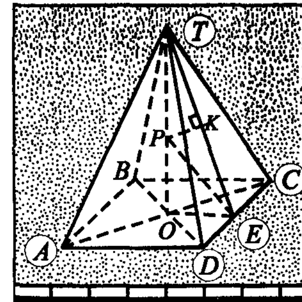
$TO = \sqrt{TK^2 - OK^2} = a\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$;

5) $AD = 2a\cos\beta$, $DC = 2a\cos\alpha$;

6) $V = \dfrac{1}{3}AD\cdot DC\cdot TO = \dfrac{4}{3}a^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$.

65. 54 см³.

66. $8a^2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.



Рыс. 140

Указание:

1) P – цэнтр шара, $DE = EC$, $PK\perp TE$, $PO = PK = R$ – радыус шара, $\angle OET = \alpha$, $PT = a$ (рыс. 140);

2) ΔTKP, $\angle TPK = \angle OET = \alpha$, $PK = a\cos\alpha$;

3) ΔPOE, $OE = OP\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = a\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) ΔTOE, $TE = \dfrac{OE}{\cos\alpha} = a\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

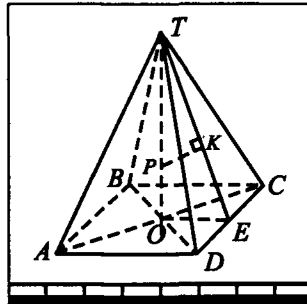
5) $S_{ABCD} = DC^2 = 4a^2\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

6) $S_{бак} = 4S_{TDC} = 2DC \cdot TE = 4a^2 \cos\alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$;

7) $S_{поўн} = S_{ABCD} + S_{бак} = 8a^2 \cos\alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

67. $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

68. $\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}$.



Рыс. 141

Указанне:

1) P – цэнтр упісанага шара, O – цэнтр асновы $ABCD$, $DE = EC$, $PK \perp TE$, $\angle DTC = \alpha$, R – радыус шара, $PO = PK = R$, $DC = a$ (рыс. 141);

2) ΔDET, $TE = DE \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

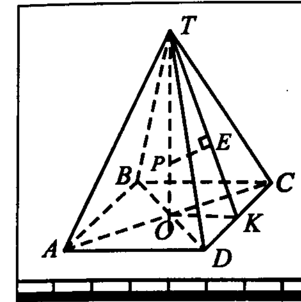
3) ΔTOE, $TO = \sqrt{TE^2 - OE^2} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

4) $TP = TO - R = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - R$;

5) $\Delta TOE \sim \Delta TKP$, такім чынам, $OE : PK = TE : (TO - R)$,

$$R = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

69. $\frac{3\pi}{32}$.



Рыс. 142

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, TO – вышыня піраміды, $DK = KC$, $PE \perp TK$, $PO = PE = R$ – радыус упісанага шара, P – цэнтр упісанага шара, $TO = H$, $H = 8R$, $AD = x$ (рыс. 142);

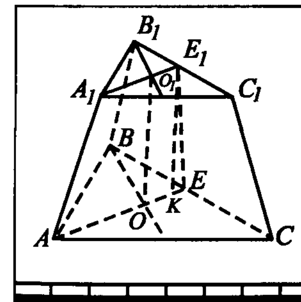
2) $\Delta TEP \sim \Delta TOK$, $OK : R = TK : TP$,

$$\frac{\frac{x}{2}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{4} + H^2}}{7R}, \quad x = \frac{H}{2\sqrt{3}} = \frac{4R}{\sqrt{3}};$$

3) $V_{пір} = \dfrac{S_{ABCD} \cdot OT}{3} = \dfrac{AD^2 \cdot OT}{3} = \dfrac{128R^3}{9}$;

4) $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{ш} : V_{пір} = \frac{3\pi}{32}$.

70. $\dfrac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{8}$.



Рыс. 143

Указанне:

1) $AC = a$, $A_1C_1 = b$, $BE = EC$, $B_1E_1 = E_1C_1$, $\angle E_1EA = \alpha$, $OO_1 = h$ (рыс. 143);

2) $V = h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$, $S_1 = S_{ABC}$, $S_2 = S_{A_1B_1C_1}$;

3) $OE = \dfrac{AE}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

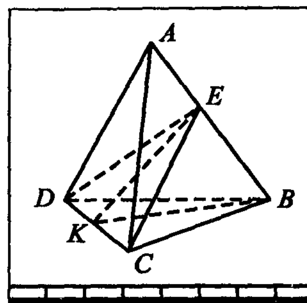
4) $O_1E_1 = \dfrac{A_1E_1}{3} = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$, $KE = \sqrt{3}\,\dfrac{a-b}{6}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{KE}$, $h = \dfrac{\sqrt{3}(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{6}$;

6) $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_2 = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $V = \dfrac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{8}$.

71. 160 см².

72. $\frac{ab^2 \operatorname{tg}\alpha}{12}$.



Рыс. 144

Указанне:

1) Няхай $DCE \perp AB \Rightarrow DCE \perp ACB$, $DCE \perp DAB$, $\angle EDC = \angle ECD = \alpha$ (рыс. 144);

2) $DK = KC$, ΔDEC – раўнабедраны, значыць, $KE \perp DC$;

3) ΔEKC, $KE = KC \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2} \operatorname{tg}\alpha$;

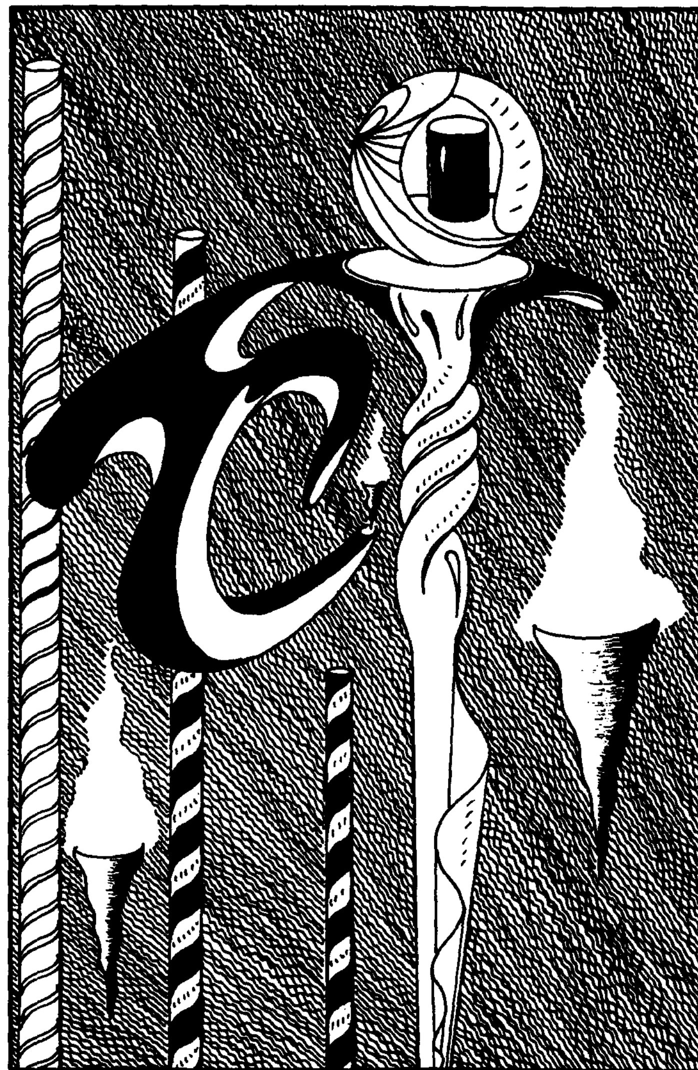
4) $S_{DEC} = \frac{DC \cdot KE}{2} = \frac{b^2}{4} \operatorname{tg}\alpha$;

5) $V_{ABCD} = V_{ADCE} + V_{BCDE} = \frac{S_{DEC} \cdot AE}{3} + \frac{S_{DEC} \cdot BE}{3} =$

$= \frac{S_{DEC} \cdot AB}{3} = \frac{ab^2 \operatorname{tg}\alpha}{12}$.

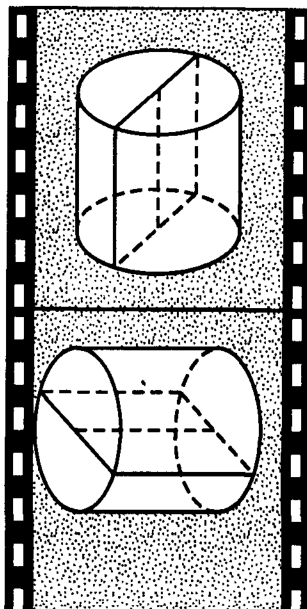
4

Цыліндр



4. ЦЫЛІНДР

4.1. Формулы, задачы


Рыс. 145

1. Цыліндр (R – радыус асновы; H – вышыня; $S_{бак}$ – плошча бакавой паверхні; $S_{поўн}$ – плошча поўнай паверхні; V – аб'ём).

1) $S_{бак} = 2\pi RH$;

2) $S_{поўн} = 2\pi RH + 2\pi R^2$;

3) $V = \pi R^2 H$.

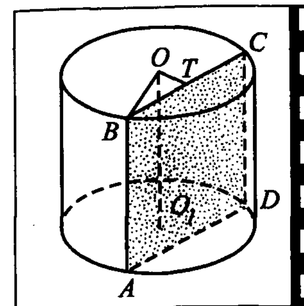
2. Цыліндр, апісаны каля прызмы. Для таго, каб каля прызмы можна было апісаць цыліндр, неабходна і дастаткова, каб прызма была прамая і каля яе асновы можна было апісаць акружнасць.

3. Цыліндр, упісаны ў прызму. Для таго, каб у прызму можна было ўпісаць цыліндр, неабходна і дастаткова, каб прызма была прамая і ў аснову яе можна было ўпісаць акружнасць.

4. Сфера, апісаная каля цыліндра. Каля любога цыліндра можна апісаць сферу.

5. Сфера, упісаная ў цыліндр. Для таго, каб у цыліндр можна было ўпісаць сферу, неабходна і дастаткова, каб яго вышыня была роўная дыяметру асновы.

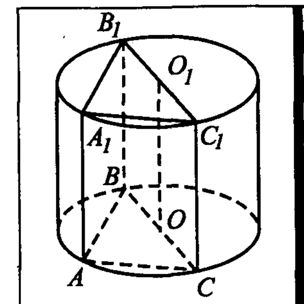
Задача 1. Знайдзіце вышыню цыліндра, у якім дыяганаль сячэння, праведзенага паралельна восі цыліндра на адлегласці 4 см ад яе, у два разы большая за радыус асновы цыліндра.



Рыс. 146

Рашэнне. Няхай $ABCD$ – сячэнне цыліндра, паралельнае яго восі OO_1, $OB = R$, пункт T – сярэдзіна адрэзка BC, а вышыня цыліндра $-x$. Тады $CD = x$, $BD = 2R$, $OT = 4$ см. У прамавугольным трохвугольніку BCD катэт $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. У трохвугольніку BTO ($\angle BTO = 90°$) катэт $BT = \sqrt{OB^2 - OT^2} = \sqrt{R^2 - 16}$. Паколькі $BC = 2BT$, то $\sqrt{4R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2 - 16}$. Адсюль знаходзім $x = 8$. Вышыня цыліндра роўная 8 см (рыс. 146).

Задача 2. Праз утваральную цыліндра праведзены два ўзаемна перпендыкулярныя сячэнні, перыметры якіх роўныя 36 см і 50 см, а рознасць іх плошчаў роўная 70 см^2. Знайдзіце плошчу восевага сячэння цыліндра.



Рыс. 147

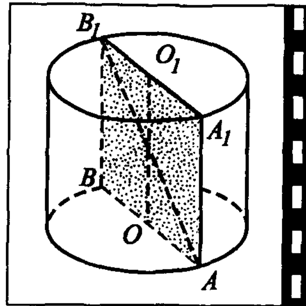
Рашэнне. Няхай AA_1B_1B і AA_1C_1C узаемна перпендыкулярныя сячэнні, $P_{AA_1B_1B} = 36$ см, $P_{AA_1C_1C} = 50$ см, $S_{AA_1C_1C} - S_{AA_1B_1B} = 70$ см^2 (рыс. 147). Абазначым даўжыню адрэзка AB праз x. Тады $AA_1 = 18 - x$, $A_1C_1 = 25 - (18 - x) = 7 + x$. Па ўмове $(18 - x)(7 + x) - x(18 - x) = 70$. З гэтага ўраўнення знаходзім $x = 8$. Значыць, $AA_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см.

У прамавугольным трохвугольніку BAC ($\angle BAC = 90°$) гіпатэнуза $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 17$ см.

Такім чынам, плошча $S_{BB_1C_1C} = BC \cdot CC_1 = 17 \cdot 10 = 170$ см^2.

5. Зак. 3319.

Задача 3. Бакавая паверхня цыліндра складае палову яго поўнай паверхні. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра, калі дыяганаль восевага сячэння роўная a.

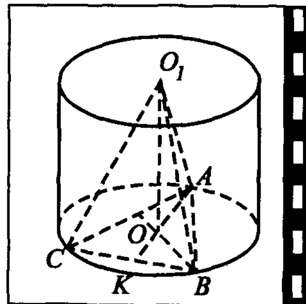


Рыс. 148

Рашэнне. Па ўмове задачы $2S_{бак} = S_{поўн}$, г. зн. $4\pi RH = 2\pi R(R+H)$. Адсюль вынікае, што $R = H$. Няхай ABB_1A_1 – восевае сячэнне. У прамавугольным трохвугольніку ABB_1 ($\angle ABB_1 = 90°$, $AB = 2R$, $BB_1 = R$) $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$, $a^2 = 4R^2 + R^2$.

Такім чынам, $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{5}}$. Поўная паверхня цыліндра $S_{поўн} = 2\pi R(R+H) = 2\pi \dfrac{a}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{5}} + \dfrac{a}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{4\pi a^2}{5}$ (рыс. 148).

Задача 4. У цыліндр упісана правільная трохвугольная піраміда. Знайдзіце аб'ём цыліндра, калі вядома, што даўжыня стараны асновы піраміды роўная b, а бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вуглом φ.

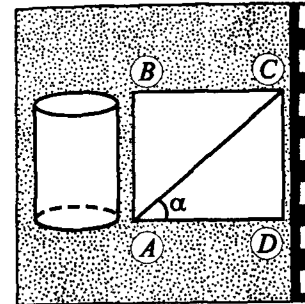


Рыс. 149

Рашэнне. Паколькі піраміда O_1ABC правільная, то яе вышыня супадае з воссю OO_1 цыліндра. Па ўмове $AC = CB = BA = b$, $\angle O_1AO = \varphi$. Няхай $AK \perp BC$. У прамавугольным трохвугольніку AKC ($\angle CKA = 90°$, $CK = \dfrac{b}{2}$, $AC = b$) катэт $AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Пункт O – цэнтр трохвугольніка ABC, значыць, $AO = \dfrac{2}{3}AK = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$. З прамавугольнага трохвугольніка AOO_1 знаходзім $OO_1 = AO\,\text{tg}\,\varphi = \dfrac{b\,\text{tg}\,\varphi}{\sqrt{3}}$.

Такім чынам, аб'ём цыліндра $V = \pi OA^2 \cdot OO_1 = \dfrac{\pi b^3\,\text{tg}\,\varphi}{3\sqrt{3}}$ (рыс. 149).

Задача 5. Бакавая паверхня цыліндра ў разгортцы ўяўляе сабой прамавугольнік $ABCD$, у якім дыяганаль AC роўная a і ўтварае вугал α з асновай AD. Знайдзіце аб'ём цыліндра, утваральная якога роўная AB.



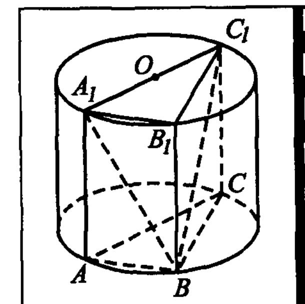
Рыс. 150

Рашэнне. Няхай прамавугольнік $ABCD$ – разгортка цыліндра, $AC = a$, $\angle CAD = \alpha$. Аснова прамавугольніка $AD = 2\pi R$. У прамавугольным трохвугольніку ADC катэт $AD = AC\cos\alpha = a\cos\alpha$. З роўнасці $2\pi R = a\cos\alpha$ знаходзім радыус асновы $R = \dfrac{a\cos\alpha}{2\pi}$. Вышыня H цыліндра роўная старане $CD = a\sin\alpha$.

Такім чынам, аб'ём цыліндра

$$V = \pi R^2 H = \frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi} \text{ (рыс. 150).}$$

Задача 6. У цыліндр упісана прызма $ABCA_1B_1C_1$, асновай якой служыць раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік. Знайдзіце аб'ём цыліндра, калі плошчы роўных бакавых граняў прызмы роўныя S, а плошча яе сячэння BA_1C_1 роўная Q.



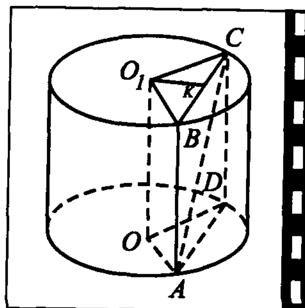
Рыс. 151

Рашэнне. Няхай $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, $A_1B_1 = B_1C_1 = x$, $BB_1 = H$ (рыс. 151). У трохвугольнай пірамідзе $B_1A_1C_1B$ плоскія вуглы пры вяршыні B_1 прамыя, значыць, $S^2_{A_1BC_1} = S^2_{A_1B_1B} + S^2_{B_1C_1B} + S^2_{A_1B_1C_1}$, або $Q^2 = \left(\dfrac{S}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{S}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2$. Адсюль знаходзім $x^4 = 4Q^2 - 2S^2$. У прамавугольным трох-

вугольніку $A_1B_1C_1$ гіпатэнуза $A_1C_1 = 2R$, такім чынам, $4R^2 = 2x^2$, $R^2 = \frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{4Q^2 - 2S^2}}{2}$. Плошча $S = xH$. Адсюль $H = \frac{S}{x} = \frac{S}{\sqrt[4]{4Q^2 - 2S^2}}$. Цяпер знаходзім аб'ём цыліндра $V = \pi R^2 H =$

$$= \pi \frac{\sqrt{4Q^2 - 2S^2}}{2} \cdot \frac{S}{\sqrt[4]{4Q^2 - 2S^2}} = \frac{\pi S\sqrt{4Q^2 - 2S^2}}{2\sqrt[4]{4Q^2 - 2S^2}} = \frac{1}{2}\pi S\sqrt[4]{4Q^2 - 2S^2}.$$

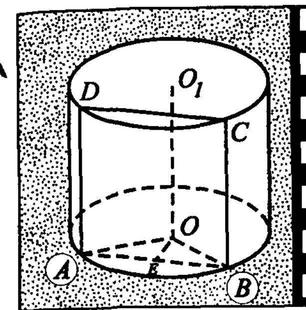
Задача 7. Вышыня цыліндра 12 см, а радыус асновы 10 см. Адрэзак даўжыней 20 см размешчаны так, што яго канцы ляжаць на акружнасцях абедзвюх асноў. Знайдзіце адлегласць ад гэтага адрэзка да восі цыліндра.



Рыс. 152

Рашэнне. Праз дадзены адрэзак AC, даўжыня якога роўная 20 см, правядзём плоскасць $ABCD$, паралельную восі цыліндра OO_1 (рыс. 152). Тады адлегласць паміж OO_1 і AC, якія скрыжоўваюцца, будзе роўная O_1K ($O_1K \perp BC$), г. зн. адлегласці ад прамой OO_1 да плоскасці $ABCD$. У прамавугольным трохвугольніку ABC катэт $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 16$ см, $BK = 8$ см, $O_1B = 10$ см. З прамавугольнага трохвугольніка O_1KB знаходзім $O_1K = \sqrt{O_1B^2 - BK^2} = 6$ см.

Задача 8. У цыліндры паралельна яго восі на адлегласць a ад яе праведзена сякучая плоскасць, якая ад акружнасці асновы адсякае дугу α. Плошча сячэння роўная S. Знайдзіце аб'ём цыліндра.



Рыс. 153

Рашэнне. Няхай пункт O – цэнтр асновы цыліндра, $ABCD$ – сячэнне, пункт E – сярэдзіна адрэзка AB. Тады $\angle AOB = \alpha$, $OE = a$, $S_{ABCD} = S$, $AO = R$, $AD = H$. У прамавугольным трохвугольніку AEO гіпатэнуза $AO = \frac{OE}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, а катэт $AE = OE\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Плошча сячэння $S = AB \cdot AD = \left(2a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)H$. Адсюль знаходзім $H = \frac{S}{2a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Аб'ём цыліндра $V = \pi R^2 H = \pi \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{2a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a S}{\sin\alpha}$ (рыс. 153).

4.2. Задачы.

1. Вышыня цыліндра роўная h. У разгортцы $ABCD$ яго бакавой паверхні ўтваральная CD складае з дыяганаллю BD разгорткі вугал α. Знайдзіце аб'ём цыліндра.
2. З квадрата, дыяганаль якога роўная d, згорнута бакавая паверхня цыліндра. Знайдзіце аб'ём цыліндра.
3. Плошча восевага сячэння прамога кругавога цыліндра роўная S, а плошча поўнай паверхні роўная Q. Знайдзіце аб'ём цыліндра.
4. У цыліндры плошча сячэння, перпендыкулярнага ўтваральнай, роўная M, а плошча восевага сячэння роўная N. Знайдзіце паверхню і аб'ём цыліндра.

5. Плошча восевага сячэння цыліндра роўная Q, вугал паміж дыяганаллю сячэння і плоскасцю асновы роўны α. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

6. Знайдзіце дыяганаль восевага сячэння цыліндра, калі аб'ём цыліндра роўны 120π, а бакавая паверхня роўная 60π.

7. Плошча асновы цыліндра адносіцца да плошчы восевага сячэння як $\pi : 4$. Знайдзіце вугал паміж дыяганалямі восевага сячэння.

8. Радыус асновы цыліндра ў тры разы большы за яго вышыню. У колькі разоў плошча поўнай паверхні цыліндра большая за плошчу яго бакавой паверхні?

9. У цыліндры паралельна яго восі праведзена плоскасць, якая адсякае ад акружнасці асновы дугу, роўную 2α. Дыяганаль утворанага сячэння нахілена да плоскасці асновы пад вуглом β. Знайдзіце аб'ём цыліндра, калі плошча сячэння роўная S.

10. Плоскасць, праведзеная паралельна восі цыліндра, дзеліць акружнасць асновы ў адносіне $m : n$. Плошча сячэння роўная S. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра.

11. У цыліндры паралельна яго восі на адлегласці a ад яе праведзена плоскасць, якая адсякае ад акружнасці асновы дугу α. Плошча сячэння роўная S. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

12. Радыус асновы цыліндра роўны 26 см, даўжыня ўтваральнай – 48 см. На якой адлегласці ад восі цыліндра неабходна правесці сячэнне, паралельнае восі цыліндра, каб яно мела форму квадрата?

13. Пункт акружнасці верхняй асновы цыліндра злучаны з пунктам акружнасці ніжняй асновы. Вугал паміж радыусамі, праведзенымі ў гэтыя пункты, роўны α. Знайдзіце вугал паміж дадзенай прамой і воссю цыліндра, калі вядома, што вышыня цыліндра роўная яго дыяметру.

14. Дадзен прамы цыліндр з радыусам асновы, роўным r. Пункт A, які ляжыць на акружнасці верхняй асновы, злучаны прамой з пунктам B на акружнасці ніжняй асновы. Даўжыня дугі A^1B (дзе A^1 – праекцыя пункта A на аснову) роўная l. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABQ, где Q – сярэдзіна восі цыліндра, а даўжыня гэтай восі роўная h.

15. У цыліндр упісана прамая прызма, асновай якой служыць раўнабедраны трохвугольнік з тупым вуглом, роўным α. Знайдзіце аб'ём цыліндра, калі вядома, што бакавая старана асновы прызмы роўная b, а дыяганаль большай бакавой грані роўная l.

16. У цыліндр упісаны прамавугольны паралелепіпед, у якога адна са старон асновы роўная b. Дыяганаль паралелепіпеда ўтварае з плоскасцю асновы вугал α, а з бакавой гранню, якая праходзіць праз дадзеную старану асновы, – вугал β. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра.

17. У цыліндр упісана правільная n-вугольная прызма. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў прызмы і цыліндра.

18. У цыліндр упісаны прамавугольны паралелепіпед, дыяганаль якога складае з прылеглымі да яе старанамі асновы вуглы, адпаведна роўныя α і β. Знайдзіце адносіну аб'ёму паралелепіпеда да аб'ёму цыліндра.

19. У цыліндр упісана правільная чатырохвугольная прызма. Дыяганаль прызмы ўтварае з бакавой гранню вугал α, вышыня прызмы роўная h. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра.

20. У цыліндр упісана правільная чатырохвугольная піраміда. Знайдзіце вугал паміж воссю цыліндра і бакавой гранню піраміды, калі вядома, што бакавы кант піраміды нахілены да плоскасці асновы пад вуглом φ.

21. У цыліндр упісаны шар. Знайдзіце аб'ём шара, калі аб'ём цыліндра роўны $\frac{15}{2}$.

22. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндра і конуса, упісанага ў адзін і той жа шар, калі вышыня і цыліндра, і конуса роўная радыусу шара.

23. Знайдзіце адносіну аб'ёму шара да аб'ёму прамога кругавога цыліндра, упісанага ў гэты шар, калі вядома, што меншы вугал паміж дыяганалямі восевага сячэння цыліндра роўны α, а дыяметр асновы большы за вышыню цыліндра.

24. Унутры цыліндра вышыней $3a$ размешчаны тры аднолькавыя шары радыуса a так, што кожны шар датыкаецца да двух другіх і да бакавой паверхні цыліндра, прычым два шары датыкаюцца да ніжняй асновы, а трэці – да верхняй. Знайдзіце радыус асновы цыліндра.

25. Праз утваральную AA_1 цыліндра праведзены дзве сякучыя плоскасці, адна з якіх праходзіць праз вось цыліндра. Знайдзіце адносіну плошчаў сячэнняў цыліндра гэтымі пласкасцямі, калі вугал паміж імі роўны φ.

26. Праз утваральную цыліндра праведзены дзве ўзаемна перпендыкулярныя плоскасці. Плошча кожнага з атрыманых сячэнняў роўная S. Знайдзіце плошчу восевага сячэння цыліндра.

27. У конус упісаны цыліндр, дыяганалі восевага сячэння якога паралельныя ўтваральным конуса. Утваральная конуса роўная l і складае з плоскасцю асновы конуса вугал α. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

28. У конус упісаны цыліндр, вышыня якога роўная дыяметру асновы конуса. Плошча поўнай паверхні цыліндра роўная плошчы асновы конуса. Знайдзіце велічыню вугла паміж утваральнай конуса і плоскасцю асновы.

29. У конус упісаны цыліндр, вышыня якога роўная радыусу асновы конуса. Знайдзіце велічыню вугла паміж воссю конуса і яго ўтваральнай, калі вядома, што плошча поўнай паверхні цыліндра адносіцца да плошчы асновы конуса як 3 : 2.

30. У прамы конус, восевым сячэннем якога з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік, упісаны цыліндр (ніжняя аснова цыліндра ляжыць у плоскасці асновы конуса). Адносіна плошчы бакавой паверхні конуса да плошчы бакавой паверхні цыліндра роўная $4\sqrt{2}$. Знайдзіце велічыню вугла паміж плоскасцю асновы конуса і прамой, якая праходзіць праз цэнтр верхняй асновы цыліндра і адвольны пункт акружнасці асновы конуса.

31. Конус размешчаны так, што яго аснова супадае з адной з асноў цыліндра, а вяршыня ляжыць у цэнтры другой асновы цыліндра. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні цыліндра, калі аб'ём конуса роўны V, а яго ўтваральная з воссю цыліндра вугал α.

32. Конус і цыліндр маюць агульную аснову, а вяршыня конуса знаходзіцца ў цэнтры другой асновы цыліндра. Знайдзіце велічыню вугла паміж воссю конуса і яго ўтваральнай, калі вядома, што поўная паверхня цыліндра адносіцца да поўнай паверхні конуса як 7 : 4.

33. У цыліндр змешчаны конус так, што аснова конуса супадае з ніжняй асновай цыліндра, а вяршыня конуса супадае з цэнтрам верхняй асновы цыліндра. Утваральная конуса нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α. Знайдзіце аб'ём цыліндра, калі плошча поўнай паверхні конуса роўная S.

34. На асновах цыліндра пабудаваны два конусы з вяршынямі ў сярэдзіне восі цыліндра. Знайдзіце аб'ём цыліндра, калі сума аб'ёмаў конусаў роўная $\frac{2\pi a^3}{3}$ і ўтваральная кожнага конуса нахілена да плоскасці асновы под вуглом $45°$.

35. Знайдзіце радыус асновы R і вышыню H цыліндра, які мае пры дадзеным аб'ёме $V = 16\pi$ найменшую поўную паверхню.

36. Знайдзіце адносіну вышыні да радыуса асновы цыліндра, які пры зададзеным аб'ёме мае найменшую поўную паверхню.

37. Каля цыліндра, радыус асновы якога роўны r, а вышыня – h, апішыце конус найменшага аб'ёму, калі плоскасць асновы цыліндра і плоскасць асновы конуса супадаюць. Знайдзіце аб'ём гэтага конуса.

38. Цііндр, вышыня якога роўная h, а радыус асновы – r, упісаны ў конус. Знайдзіце велічыню вугла пры вяршыні восевага сячэння, пры якой аб'ём конуса будзе найменшым.

39. У конус упісаны цыліндр так, што аснова цыліндра ляжыць на аснове конуса, а другая аснова супадае з сячэннем конуса плоскасцю. Радыус асновы цыліндра ў два разы меншы за радыус асновы конуса. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндра і конуса.

40. Восевым сячэннем цыліндра з'яўляецца квадрат, а восевым сячэннем конуса – правільны трохвугольнік, роўнавялікі квадрату. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндра і конуса.

41. Вышыня цыліндра роўная вышыні конуса. Бакавая паверхня цыліндра адносіцца да бакавой паверхні конуса як 3 : 2. Акрамя таго, вядома, што вугал, які складае ўтваральная конуса з плоскасцю асновы, роўны α. Знайдзіце адносіну аб'ёму цыліндра да аб'ёму конуса.

42. У шар радыуса R упісаны конус, а ў гэты конус упісаны цыліндр з квадратным восевым сячэннем. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра, калі вугал паміж утваральнай конуса і плоскасцю асновы роўны α.

43. Дадзены цыліндр і шар. Радыусы асноў цыліндра і большага круга шара роўныя. Поўная паверхня цыліндра адносіцца да паверхні шара як $m : n$. Знайдзіце адносіну іх аб'ёмаў.

44. Дадзен шар, цыліндр з квадратным сячэннем і конус. Цыліндр і конус маюць аднолькавыя асновы, а іх вышыні роўныя дыяметру шара. Як адносяцца аб'ёмы цыліндра, шара і конуса?

45. Каля куба апісаны цыліндр так, што канцы дыяганалі куба знаходзяцца ў цэнтрах асноў цыліндра, а яго астатнія вяршыні – на бакавой паверхні цыліндра. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра, калі плошча дыяганальнага сячэння куба роўная S.

46. Асновай прамой прызмы служыць раўнабедраная трапецыя, дыяганаль якой утварае вугал α з кожнай з паралельных старон. Бакавая паверхня прызмы роўная Q. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра, упісанага ў гэту прызму.

47. Адрэзак, які злучае дыяметральна процілеглыя пункты A і K верхняй і ніжняй асноў цыліндра, роўны a і нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні цыліндра.

48. Трохвугольнік ABC^1 (вяршыні A і B – канцы дыяметра ніжняй асновы, C^1 – канец перпендыкулярнага да яго дыяметра верхняй асновы цыліндра) – роўнастаронні са стараной a. Знайдзіце плошчы бакавой і поўнай паверхняў цыліндра.

49. На адной аснове пабудаваны конус і роўнавялікі яму цыліндр. Праз сярэдзіну вышыні цыліндра праведзена плоскасць, паралельная аснове. Як адносяцца плошчы атрыманых сячэнняў цыліндра і конуса?

50. У аснове цыліндра праведзена хорда, роўная старане правільнага шасцівугольніка, упісанага ў гэту аснову. Калі злучыць канцы хорды з цэнтрам другой асновы, то атрымаецца трохвугольнік, плошча якога роўная Q, а вугал пры вяршыні роўны α. Вылічыце аб'ём дадзенага цыліндра.

51. Дакажыце, што калі бакавая паверхня цыліндра роўная плошчы яго асновы, то радыус асновы цыліндра ў два разы большы за яго вышыню.

52. У колькі разоў бакавая паверхня цыліндра большая за плошчу яго восевага сячэння?

53. Аб'ём цыліндра роўны 400π, а плошча яго восевага сячэння роўная 80. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра.

54. Вугал паміж утваральнай цыліндра і дыяганаллю восевага сячэння, які змяшчае гэту ўтваральную, роўны α, а плошча асновы роўная S. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні цыліндра.

55. Дыяганалі восевага сячэння цыліндра перасякаюцца пад вуглом α, павернутым да асноў. Знайдзіце вышыню цыліндра, калі яго аб'ём роўны V.

56. У цыліндр упісаны прамавугольны паралелепіпед, дыяганаль якога роўная m і ўтварае з асновай вугал α. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

57. Поўная паверхня цыліндра роўная 192π см^2, а вышыня яго на 4 см большая за радыус асновы. Знайдзіце радыус асновы і вышыню цыліндра.

58. Вышыня цыліндра на 4 см большая за радыус яго асновы, а бакавая паверхня роўная 120π см^2. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

59. Калі ў роўнастароннім цыліндры радыус асновы павялічыць на 2, а вышыню паменшыць на 3, то бакавая паверхня цыліндра застанецца той жа. Знайдзіце, як зменіцца пры гэтым аб'ём цыліндра.

60. Калі вышыню цыліндра пакінуць без змены, а радыус асновы павялічыць у два разы, то бакавая паверхня цыліндра павялічыцца на 8π, а аб'ём – на 12π. Знайдзіце першапачатковыя размеры цыліндра.

61. Бакавая паверхня цыліндра роўная 120π, а радыус асновы роўны 4. Знайдзіце бакавую паверхню такога роўнастаронняга цыліндра, дыяметр асновы якога роўны дыяганалі восевага сячэння дадзенага цыліндра.

62. Радыусы асноў двух роўнавялікіх цыліндраў – 30 см і 18 см, а поўная паверхня першага цыліндра роўная бакавой паверхні другога. Знайдзіце вышыні гэтых цыліндраў.

63. Поўная паверхня цыліндра роўная 456π, а вышыня – 7. Знайдзіце дыяганаль восевага сячэння цыліндра.

64. Знайдзіце размеры цыліндра, поўная паверхня якога адносіцца да яго бакавой паверхні як 5 : 3, а перыметр восевага сячэння роўны 42.

65. Па восі цыліндра, радыус асновы якога роўны 7 см, а вышыня – 20 см, прасвідравалі скразную адтуліну цыліндрычнай формы з радыусам асновы 2 см. Знайдзіце аб'ём і поўную паверхню атрыманай дэталі.

66. Знайдзіце аб'ём цыліндра, упісанага ў правільную шасцівугольную прызму, кожны кант якой роўны a.

67. Знайдзіце вышыню цыліндра, у якім дыяганаль сячэння, праведзенага паралельна восі цыліндра на адлегласці 4 дм ад яе, у два разы большая за радыус асновы цыліндра.

68. У цыліндры, радыус асновы якога роўны 6 дм, а вышыня роўная 4 дм, дуга AB паміж утваральнымі AA_1 і BB_1 змяшчае $120°$. Вылічыце найкарацейшую адлегласць па паверхні цыліндра паміж пунктамі A і B_1.

69. Калі ў роўнастароннім цыліндры радыус асновы павялічыць на 2 см, а вышыню цыліндра паменшыць на 2 см, то поўная паверхня цыліндра павялічыцца на 96π см^2. Знайдзіце радыус цыліндра.

70. Радыус асновы цыліндра роўны 12 см, а вышыня – 6 см. На колькі патрэбна паменшыць радыус асновы, не змяняючы вышыні цыліндра, каб поўная паверхня цыліндра паменшылася на 208π см^2?

71. Знайдзіце радыус асновы і ўтваральную цыліндра, поўная паверхня якога роўная 130π см^2, а перыметр восевага сячэння роўны 36 см.

72. Поўная паверхня цыліндра роўная 320π см^2, а плошча восевага сячэння – 192 см^2. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

73. Бакавыя паверхні двух цыліндраў, якія маюць роўныя радыусы асноў, адносяцца як 5 : 9. Дыяганалі восевых сячэнняў гэтых цыліндраў роўныя 13 см і 15 см. Знайдзіце вышыні цыліндраў.

74. Поўная паверхня роўнастаронняга цыліндра роўная поўнай паверхні другого цыліндра, плошча восевага сячэння якога роўная 78 дм^2, а радыус асновы на 1 дм меншы за радыус асновы першага цыліндра. Знайдзіце вышыню другога цыліндра.

75. Знайдзіце вышыню цыліндра, бакавая паверхня якога роўная 80π см^2, а дыяганаль сячэння, паралельнага восі цыліндра і аддаленага ад яе на 4 см, роўная 10 см.

76. Знайдзіце радыус цыліндра, поўная паверхня якога роўная 110π см^2, а сячэнне цыліндра, паралельнае яго восі і аддаленае ад яе на 4 см, з'яўляецца квадратам.

77. Праз утваральную цыліндра праведзены два сячэнні, плоскасці якіх утвараюць двухгранны вугал у $60°$. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра, калі плошчы сячэнняў роўныя 22 см^2 і 26 см^2.

78. Сячэнне, праведзенае праз утваральную цыліндра, дзеліць акружнасць яго асновы ў адносіне 1 : 5. Поўная паверхня цыліндра роўная 168π см^2, а перыметр сячэння роўны 28 см. Знайдзіце дыяганаль сячэння.

79. У цыліндр змешчаны раўнабедраны трохвугольнік так, што вяршыні яго вуглоў пры аснове ляжаць на акружнасці адной асновы, а трэцяя вяршыня – на акружнасці другой асновы цыліндра. Аснова трохвугольніка роўная 32 см, а плошча – 640 см^2. Знайдзіце вышыню цыліндра, калі плоскасць трохвугольніка дзеліць вось цыліндра ў адносіне 3 : 5.

80. У цыліндр упісаны роўнастаронні трохвугольнік так, што яго вяршыні ляжаць на акружнасцях асноў цыліндра, а плоскасць трохвугольніка дзеліць вось цыліндра ў адносіне 5 : 13. Старана трохвугольніка роўная 12 см. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра.

81. Праз утваральную цыліндра праведзены два ўзаемна перпендыкулярныя сячэнні, перыметры якіх роўныя 36 см і 50 см, а рознасць іх плошчаў роўная 70 см^2. Знайдзіце плошчу восевага сячэння цыліндра.

82. Лінія перасячэння двух узаемна перпендыкулярных сячэнняў цыліндра паралельна яго восі і дзеліць адно з гэтых сячэнняў на часткі, плошчы якіх роўныя 32 см^2 і 352 см^2, а другое – на часткі, плошчы якіх адносяцца як 4 : 11. Знайдзіце плошчу восевага сячэння.

83. Каля роўнастаронняга цыліндра апісана трохвугольная прызма, перыметр асновы якой роўны 42 см, а поўная паверхня роўная 504 см^2. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра.

84. Каля цыліндра апісана прызма, аб'ём якой роўны 480 см^3, а бакавая паверхня – 320 см^2. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра, калі дыяганаль яго восевага сячэння роўная 10 см.

85. Каля роўнастаронняга цыліндра апісана трохвугольная прызма, аб'ём якой роўны 672 см^3, а поўная паверхня – 504 см^2. Знайдзіце паверхню цыліндра.

86. Каля роўнастаронняга цыліндра апісана прызма, аб'ём якой роўны 1152 см^3. Паверхні прызмы і цыліндра адносяцца як $9 : \pi$. Знайдзіце радыус цыліндра.

87. Конус, радыус асновы якога роўны 12 см, і цыліндр радыуса 10 см маюць агульную вышыню і роўнавялікія бакавыя паверхні. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

88. У цыліндр упісана правільная трохвугольная прызма, а ў прызму – другі цыліндр; рознасць бакавых паверхняў гэтых цыліндраў роўная $40\sqrt{3}\pi$ см^2. Знайдзіце рознасць аб'ёмаў цыліндраў, калі старана асновы прызмы роўная 24 см.

89. Каля правільнай трохвугольнай піраміды, кожны кант якой роўны a, апісаны цыліндр так, што ўсе вяршыні піраміды ляжаць на акружнасцях асноў цыліндра. Знайдзіце аб'ём і бакавую паверхню цыліндра.

90. Каля правільнай чатырохвугольнай піраміды, кожны кант якой роўны a, апісаны цыліндр так, што ўсе вяршыні піраміды ляжаць на акружнасцях асноў цыліндра. Знайдзіце аб'ём і бакавую паверхню цыліндра.

91. З мноства цыліндраў, у якіх перыметр восевага сячэння роўны $2p$, знайдзіце аб'ём цыліндра, які мае найбольшую бакавую паверхню.

92. З мноства цыліндраў, у якіх перыметр восевага сячэння роўны $2p$, знайдзіце аб'ём і бакавую паверхню цыліндра, у якім адлегласць ад цэнтра адной з асноў да акружнасці другой найменшая.

93. У конус, радыус асновы якога роўны 6 см, а вышыня роўная 15 см, упісаны цыліндр, які мае найбольшую поўную паверхню. Знайдзіце аб'ём гэтага цыліндра.

94. У конус, радыус асновы якога роўны R, а вышыня роўная h, упісаны цыліндр радыуса r. Знайдзіце аб'ём цыліндра і вызначыце, пры якім значэнні r аб'ём цыліндра будзе найбольшым.

95. З мноства цыліндраў, упісаных у шар радыуса R, знайдзіце аб'ём цыліндра, які мае найбольшую бакавую паверхню.

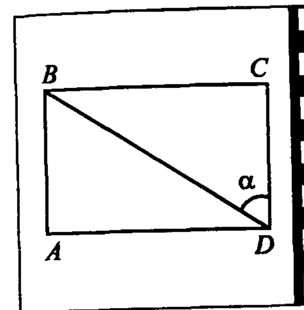
96. З мноства цыліндраў, упісаных у шар радыуса R, знайдзіце бакавую паверхню цыліндра, які мае найбольшы аб'ём.

97. Перыметр восевага сячэння цыліндра роўны $2a$. Знайдзіце, якой даўжыні павінен быць радыус асновы цыліндра, каб рознасць паміж паверхняй апісанага шара і поўнай паверхняй цыліндра была найменшай.

98. Перыметр восевага сячэння цыліндра роўны $2a$. Знайдзіце, якой даўжыні павінен быць радыус асновы цыліндра, каб сума паверхні апісанага шара і поўнай паверхні цыліндра была найменшай.

4.3. Адказы і ўказанні

1. $\dfrac{h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4\pi}$.



Рыс. 154

Указанне:

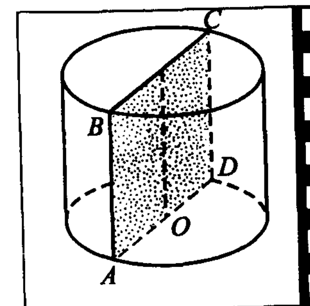
1) $CD = h$, $\angle BDC = \alpha$, R – радыус асновы цыліндра (рыс. 154);

2) $BC = 2\pi R$; ΔBCD, $BC = CD \cdot tg\alpha = h \cdot tg\alpha$, значыць, $2\pi R = h \cdot tg\alpha$, $R = \dfrac{h \cdot tg\alpha}{2\pi}$;

3) $V = \pi R^2 \cdot CD = \dfrac{h^3 tg^2\alpha}{4\pi}$.

2. $\dfrac{d^3\sqrt{2}}{16\pi}$.

3. $\dfrac{1}{4} S\sqrt{2\pi(Q - \pi S)}$.



Рыс. 155

Указанне:

1) $S_{ABCD} = S$, $S_{поўн} = Q$, $CD = H$, $OD = OA = R$ (рыс. 155);

2) $S = AD \cdot DC = 2R \cdot H$, $H = \dfrac{S}{2R}$;

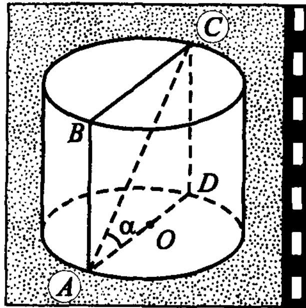
3) $Q = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R \dfrac{S}{2R}$,

$R = \sqrt{\dfrac{Q - \pi S}{2\pi}}$, $H = \dfrac{S\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{Q - \pi S}}$;

4) $V = \pi R^2 H = \dfrac{1}{4} S\sqrt{2\pi(Q - \pi S)}$.

4. $\frac{N\sqrt{\pi M}}{2}$; $\pi N + 2M$.

5. $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{4\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}$.



Рыс. 156

Указанне:

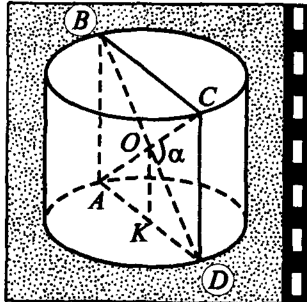
1) $S_{ABCD} = Q$, $\angle CAD = \alpha$, O – цэнтр асновы, $OD = R$ (рыс. 156);
2) ΔADC, $CD = AD\operatorname{tg}\alpha = 2R\operatorname{tg}\alpha$;
3) $Q = AD \cdot CD = 4R^2\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$

$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\operatorname{tg}\alpha}}$;

4) $V = \pi R^2 \cdot CD = 2\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha = \frac{\pi Q\sqrt{Q}}{4\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}$.

6. $\frac{\sqrt{481}}{2}$.

7. $\frac{\pi}{2}$.



Рыс. 157

Указанне:

1) $S_{асн} : S_{ABCD} = \pi : 4$, $O = AC \cap BD$, $\angle COD = \alpha$, K – цэнтр асновы (рыс. 157);
2) $S_{асн} = \pi AK^2$, $S_{ABCD} = 2AK \cdot DC$;
3) ΔADC, $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$,

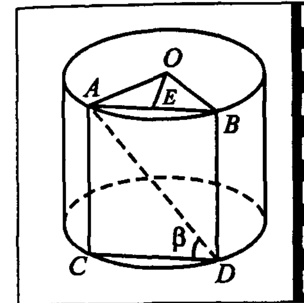
$CD = 2AK\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $S_{ABCD} = 4AK^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

4) $S_{асн} : S_{ABCD} = \pi AK^2 : 4AK^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pi : 4$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$, такім чынам,

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

8. 4.

9. $\frac{\pi S\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$.



Рыс. 158

Указанне:

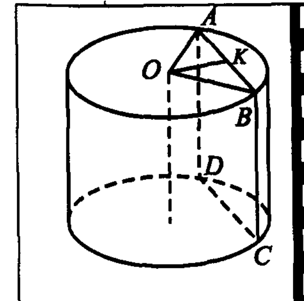
1) $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle ADC = \beta$, $S_{ABCD} = S$, O – цэнтр асновы, $OE \perp AB$;
2) ΔCDA, $CD = x$, $AC = x\operatorname{tg}\beta$ (рыс. 158);
3) $S = CD \cdot AC = x^2 tg\beta \Rightarrow$

$x = \sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}$, $AC = \sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}\operatorname{tg}\beta$;

4) ΔAEO, $AO = \frac{x}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}}{2\sin\alpha}$;
5) $V = S_{асн} \cdot AC = \pi AO^2 \cdot AC = \frac{\pi S\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$.

10. $\frac{\pi S}{\sin\frac{\pi m}{m+n}}$ $(m \le n)$.

11. $\frac{\pi a S}{\sin\alpha}$.



Рыс. 159

Указанне:

1) $AK = KB$, $OK = a$, $\angle AOB = \alpha$, O – цэнтр асновы, $S_{ABCD} = S$ (рыс. 159);
2) ΔAKO, $AK = OK\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$AB = 2AK = 2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$OA = \dfrac{OK}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

3) $S = AB \cdot BC = \left(2a\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right) \cdot BC \Rightarrow BC = \dfrac{S}{2a\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $V = S_{асн} \cdot BC = \pi OA^2 \cdot BC = \dfrac{\pi a S}{\sin\alpha}$.

12. 10 см.

13. $\mathrm{arctg}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Рыс. 160

Указанне:

1) $\angle A_1OB = \alpha$, $A_1K = KB$, $\angle A_1AB = \beta$, O – цэнтр асновы (рыс. 160);

2) ΔOKA_1, $A_1K = OA_1 \sin\dfrac{\alpha}{2}$;

$A_1B = 2A_1K = 2OA_1 \sin\dfrac{\alpha}{2}$;

3) $AA_1 = 2OA_1$;

4) ΔAA_1B, $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{A_1B}{AA_1} = \sin\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\beta = \mathrm{arctg}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

14. $r\cos\dfrac{l}{2r}\sqrt{h^2 + 4r^2 \sin\dfrac{l}{2r}}$.

15. $\dfrac{\pi b^2\sqrt{l^2 - 4b^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Рыс. 161

Указанне:

1) $BC = BA = b$, $\angle ABC = \alpha$, $AC_1 = l$, $AE = EC$, O – цэнтр асновы, $OB = OK = R$ (рыс. 161);

2) ΔBEC, $CE = b\sin\dfrac{\alpha}{2}$,

$AC = 2CE = 2b\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $BE = b\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

3) ΔACC_1,

$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - 4b^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $OE = R - BE = R - b\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $EK = R + OE = 2R - b\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

5) $CE^2 = BE \cdot EK$, $b^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = b\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(2R - b\cos\dfrac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow R = \dfrac{b}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

6) $V = \pi R^2 \cdot CC_1 = \dfrac{\pi b^2\sqrt{l^2 - 4b^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

16. $\dfrac{\pi b^2 \sin 2\alpha}{4(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}$.

17. $\dfrac{n}{2\pi}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.

Рыс. 162

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, $OA = OB = R$, $AA_1 = H$ (рыс. 162);

2) $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{n}$, ΔAOB,

$S_{AOB} = \dfrac{AO \cdot OB \sin\angle AOB}{2} = \dfrac{R^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$;

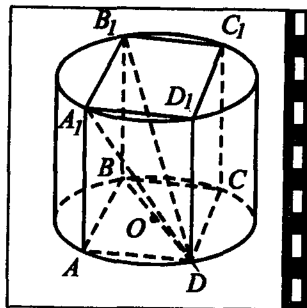
3) $S_{асн.прыз.} = nS_{AOB} = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{360°}{n}$;

4) $V_ц = \pi R^2 H$, $V_{прыз.} = S_{асн}H = \frac{R^2 nH}{2}\sin\frac{360°}{n}$;

5) $V_{прыз} : V_ц = \frac{n}{2\pi}\sin\frac{360°}{n}$.

18. $\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$.

19. $\frac{\pi h^2\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$.



Рыс. 163

Указанне:

1) $\angle B_1DA_1 = \alpha$, $AA_1 = h$, O – цэнтр асновы, $AD = x$ (рыс. 163);

2) ΔA_1AD,

$A_1D = \sqrt{A_1A^2 + AD^2} = \sqrt{h^2 + x^2}$;

3) ΔB_1A_1D, $A_1D = A_1B_1 \operatorname{ctg}\alpha = x\operatorname{ctg}\alpha$,

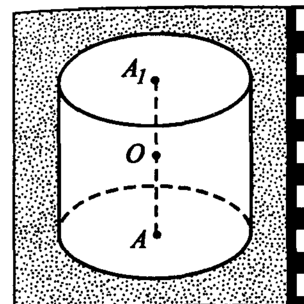
$\sqrt{h^2+x^2} = x\operatorname{ctg}\alpha$, значыць, $x = \frac{h}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}}$;

4) ΔBAD, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = x\sqrt{2}$, $OB = \frac{BD}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2\operatorname{ctg}^2\alpha - 2}}$;

5) $S_{бак.ц.} = 2\pi OB \cdot AA_1 = \frac{\pi h^2\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}} = \frac{\pi h^2\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$.

20. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi}\right)$.

21. 5.



Рыс. 164

Указанне:

1) $V_ц = \frac{15}{2}$, O – цэнтр шара, $OA = R$, A – цэнтр асновы цыліндра, $AA_1 = H$ (рыс. 164);

2) $AA_1 = 2OA = 2R$,

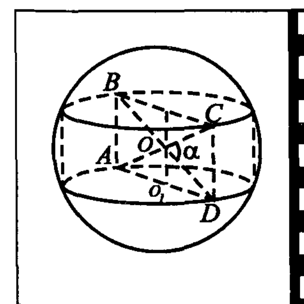
$V_ц = \pi R^2 \cdot AA_1 = 2\pi R^3$, $\frac{15}{2} = 2\pi R^3 \Rightarrow$

$R^3 = \frac{15}{4}\pi$;

3) $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{15}{4\pi} = 5$.

22. $\frac{9}{4}$.

23. $\frac{2}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.



Рыс. 165

Указанне:

1) $\angle COD = \alpha$, O – цэнтр шара, O_1 – цэнтр асновы цыліндра, $OD = R$, $O_1D = r$ (рыс. 165);

2) ΔCAD, $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$,

$CD = AC\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) ΔOO_1D,

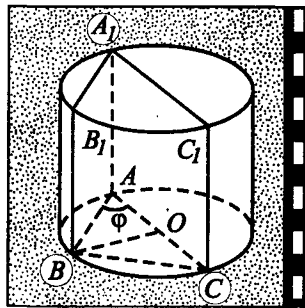
$r = \sqrt{OD^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{CD^2}{4}} = R\cos\frac{\alpha}{2}$;

4) $V_ш = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, $V_ц = \pi r^2 CD^2 = 2\pi R^3 \cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

5) $V_ш : V_ц = \dfrac{2}{3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

24. $a(3\sqrt{2}+4)$.

25. $1 : \cos\varphi$.

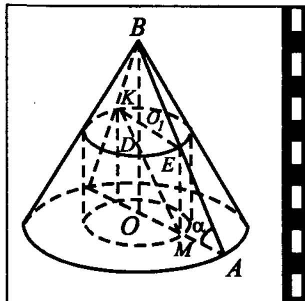


Рыс. 166

Указанне:
1) $\angle BAC = \varphi$, O – цэнтр асновы, $OA = R$, $AA_1 = H$ (рыс. 166);
2) $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = 2RH$;
3) ΔACB, $AB = 2R\cos\varphi$;
4) $S_{ABB_1A_1} = AB \cdot AA_1 = 2RH\cos\varphi$;
5) $S_{AA_1C_1C} : S_{AA_1B_1B} = 1 : \cos\varphi$.

26. $S\sqrt{2}$.

27. $\dfrac{2}{27}\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.



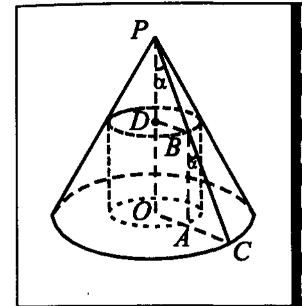
Рыс. 167

Указанне:
1) $MK \parallel AB$, $AB = l$, O – цэнтр асновы конуса, $\angle BAO = \alpha$, $\angle KMO = \alpha$, $DK = DM$ (рыс. 167);
2) ΔBOA, $OB = AB\sin\alpha = l\sin\alpha$;
3) $\Delta BO_1E = \Delta DOM$,
$BO_1 = O_1D = DO = \dfrac{OB}{3} = \dfrac{l\sin\alpha}{3}$,
$OM = DO\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{l\cos\alpha}{3}$;

4) $V_ц = \pi OM^2 \cdot OO_1 = 2\pi OM^2 \cdot OD = 2\pi\dfrac{l^2\cos^2\alpha}{9}\cdot\dfrac{l\sin\alpha}{3} = \dfrac{2}{27}\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

28. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{4-\sqrt{6}}\right)$.

29. $\operatorname{arcctg} 2$.

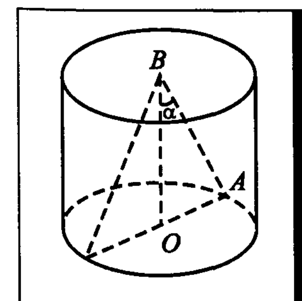


Рыс. 168

Указанне:
1) O – цэнтр асновы, $OC = OD = R$, $\angle OPC = \alpha$, $S_{п.ц.} : S_{асн.к.} = 3 : 2$, $OA = r$ (рыс. 168);
2) $S_{п.ц.} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot OD = 2\pi r^2 + 2\pi rR$,
$S_{асн.к.} = \pi R^2$, $(2\pi r^2 + 2\pi rR) : \pi R^2 = 3 : 2$
$\Rightarrow 4r^2 + 4Rr - 3R^2 = 0$, $r = \dfrac{R}{2}$;
3) ΔBAC, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2R}{R} = 2$, $\alpha = \operatorname{arcctg} 2$.

30. $\operatorname{arctg}\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$.

31. $2\sqrt[3]{9\pi V^2\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha)$.



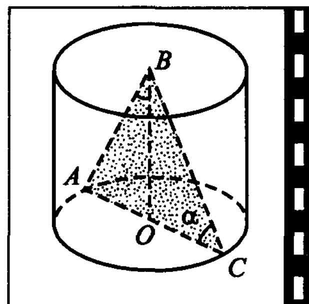
Рыс. 169

Указанне:
1) $V_к = V$, O – цэнтр асновы, $\angle OBA = \alpha$, $OA = R$, $OB = H$ (рыс. 169);
2) ΔBOA, $H = OA\operatorname{ctg}\alpha = R\operatorname{ctg}\alpha$;
3) $V = \dfrac{\pi OA^2 \cdot OB}{3} = \dfrac{\pi R^3\operatorname{ctg}\alpha}{3} \Rightarrow$
$R = \dfrac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt[3]{\pi\operatorname{ctg}\alpha}}$;

4) $S_{п.ц.} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = = 2\sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot (1 + \operatorname{ctg}\alpha)$.

32. $\arcsin\frac{3}{5}$.

33. $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{S\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg}\alpha$.



Рыс. 170

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, $\angle BCO = \alpha$, $S_{пав.к.} = S$, $OC = R$, $OB = H$ (рыс. 170);

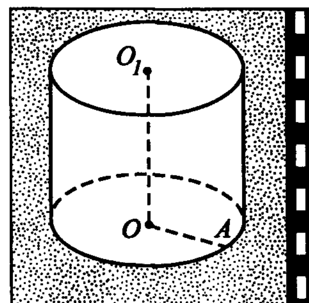
2) ΔBOC, $BC = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$, $OB = OC\operatorname{tg}\alpha = R\operatorname{tg}\alpha$;

3) $S = \pi R^2 + \pi R \cdot BC = \frac{\pi R^2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$ $\Rightarrow R = \frac{\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt{\pi(1+\cos\alpha)}}, H = tg\alpha\frac{\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt{\pi(1+\cos\alpha)}}$;

4) $V_ц = \pi R^2 H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{S\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg}\alpha$.

34. $2\pi a^3$.

35. $H = 4$, $R = 2$.



Рыс. 171

Указанне:

1) $V = 16\pi$, O – цэнтр асновы, $OA = R$, $OO_1 = H$ (рыс. 171);

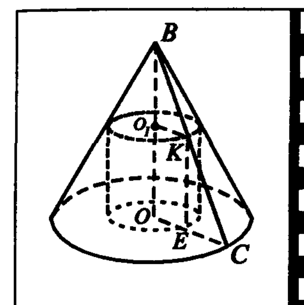
2) $V_ц = \pi R^2 H$, $\pi R^2 H = 16\pi \Rightarrow R = \frac{4}{\sqrt{H}}$;

3) $S_{поўн} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = \frac{32\pi}{H} + \frac{8\pi H}{\sqrt{H}}$, $S' = -\frac{32\pi}{H^2} + \frac{4\pi}{\sqrt{H}}$, $S' = 0 \Rightarrow \frac{-32\pi + 4\pi H\sqrt{H}}{H^2} = 0 \Rightarrow H = 4$;

4) $H = 4$ – пункт мінімуму, $R = 2$.

36. 2 : 1.

37. $R = \frac{3r}{2}$, $V = \frac{9\pi r^2 h}{4}$.



Рыс. 172

Указанне:

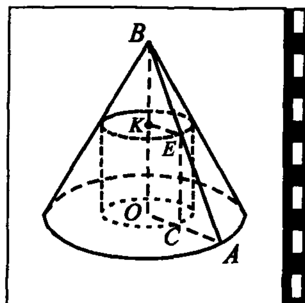
1) O – цэнтр асновы; $OE = O_1K = r$, $OO_1 = h$, $OC = R$, $OB = H$, $O_1B = x$ (рыс. 172);

2) $\Delta BO_1K \sim \Delta BOC$, $BO_1 : BO = O_1K : OC$, $\frac{x}{x+h} = \frac{r}{R} \Rightarrow x = \frac{rh}{R-r}$, $H = x + h = \frac{Rh}{R-r}$;

3) $V_к = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi h R^3}{3(R-r)}$, $V_к' = \frac{\pi h(2R^3 - 3R^2 r)}{3(R-r)^2}$, $R = \frac{3r}{2}$ – пункт мінімуму, $H = 3h$, $V_K = \frac{9\pi r^2 h}{4}$.

38. $2\operatorname{arctg}\frac{r}{2H}$.

39. 3 : 8.



Рыс. 173

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, $OC = \frac{OA}{2}$ (рыс. 173);

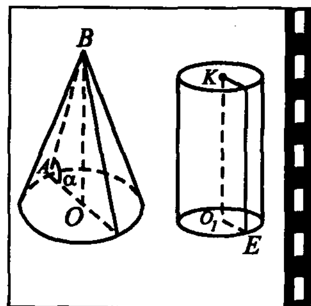
2) $\Delta BKE \backsim \Delta BOA$, $BK : BO = KE : OA \Rightarrow OB = 2BK$;

3) $V_к = \frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot OB = \frac{1}{3}\pi (2OC)^2 2BK = \frac{8\pi OC^2 \cdot BK}{3}$, $V_ц = \pi OC^2 \cdot OK$;

4) $V_ц : V_к = 3 : 8$.

40. $\frac{3\sqrt[4]{3}}{4}$.

41. $\frac{27}{16\sin^2\alpha}$.



Рыс. 174

Указанне:

1) $S_{бак.цыл.} = S$, $S_{бак.кон.} = Q$, $S : Q = 3 : 2$, $BO = O_1K$, $\angle BAO = \alpha$ (рыс. 174);

2) $S = 2\pi O_1E \cdot O_1K$, $Q = \pi OA \cdot AB$;

3) ΔAOB, $AB = \frac{BO}{\sin\alpha}$, $Q = \frac{\pi OA \cdot BO}{\sin\alpha}$;

4) $S : Q = 3 : 2 \Rightarrow$

$(2\pi O_1E \cdot O_1K) : \left(\frac{\pi OA \cdot BO}{\sin\alpha}\right) = 3 : 2 \Rightarrow$

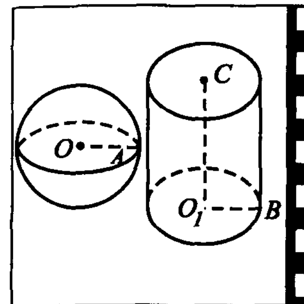
$\frac{O_1E}{OA} = \frac{3}{4\sin\alpha}$;

5) $V_ц = \pi O_1E^2 \cdot O_1K$, $V_к = \frac{\pi OA^2 \cdot OB}{3}$;

6) $V_ц : V_к = 3\frac{O_1E^2}{OA^2} = \frac{27}{16\sin^2\alpha}$.

42. $\frac{24\pi R^2 \sin^4\alpha}{(2 + \mathrm{tg}\alpha)^2}$.

43. $\frac{6m - 3n}{4n}$.



Рыс. 175

Указанне:

1) O – цэнтр шара, O_1 – цэнтр асновы цыліндра, $OA = O_1B = R$, $O_1C = H$, $S_{поўн.цыл.} : S_ш = m : n$;

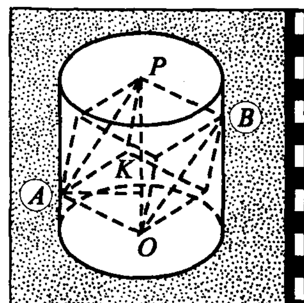
2) $S_{поўн.цыл.} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$, $S_ш = 4\pi R^2$, $(2\pi R^2 + 2\pi RH) : 4\pi R^2 = m : n \Rightarrow$ $H = \frac{2Rm - Rn}{n}$;

3) $V_ц = \pi R^2 H = \pi R^2 \frac{2Rm - Rn}{n}$, $V_ш = \frac{4\pi R^3}{3}$;

4) $V_ц : V_ш = \frac{6m - 3n}{4n}$ (рыс. 175).

44. 3 : 2 : 1.

45. $\frac{2\pi S(\sqrt{2} + 3)}{3}$.



Рыс. 176

Указанне:

1) O, P – цэнтры асноў, $AK \perp OP$, $S_{AOBP} = S$, $AK = r$, $OP = h$, $OA = x$ (рыс. 176);

2) $S = AO \cdot AP$, $AP = x\sqrt{2}$, $S = x^2\sqrt{2}$ $\Rightarrow x^2 = \frac{S}{\sqrt{2}}$;

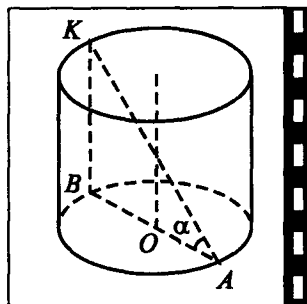
3) $h^2 = AO^2 + AP^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2 = \frac{3S}{\sqrt{2}}$;

4) ΔOAP, $hr = S \Rightarrow r^2 = \frac{S^2}{h^2} = \frac{S\sqrt{2}}{3}$;

5) $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \frac{2\pi S(\sqrt{2}+3)}{3}$.

46. $\frac{\pi Q \operatorname{tg}\alpha}{4}$.

47. $\frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2}$.

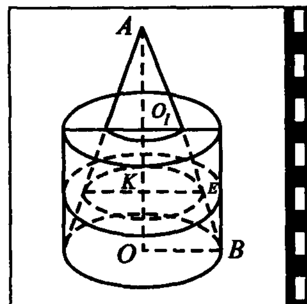


Рыс. 177

Указанне:
1) $AK = a$, $\angle BAK = \alpha$, O – цэнтр асновы, $OA = R$, $BK = H$ (рыс. 177);
2) ΔKBA, $AB = AK\cos\alpha = a\cos\alpha$, $BK = AK\sin\alpha = a\sin\alpha$;
3) $S_{бак} = 2\pi R \cdot H = \pi AB \cdot H = \pi a^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2}$.

48. $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi a^2(\sqrt{2}+1)}{2}$.

49. 36 : 25.



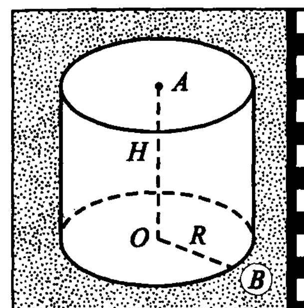
Рыс. 178

Указанне:
1) $V_к = V_ц$, O – цэнтр асновы цыліндра, $OB = R$, $OA = H$, $OK = KO_1$, $KE = r$, $OO_1 = h$ (рыс. 178);
2) $V_к = \frac{\pi R^2 H}{3}$, $V_ц = \pi R^2 h$,
$\frac{\pi R^2 H}{3} = \pi R^2 h \Rightarrow \frac{H}{h} = 3$, $\frac{H}{OK} = 6$;
3) $\Delta AKE \sim \Delta AOB$, $AK : AO = KE : OB$,

$(H - \frac{H}{6}) : H = r : R \Rightarrow r : R = 5 : 6$;
4) $S_{сяч.ц} = \pi R^2$, $S_{сяч.к.} = \pi r^2$;
5) $S_{сяч.ц} : S_{сяч.к} = \pi R^2 : \pi r^2 = R^2 : r^2 = 36 : 25$.

50. $\frac{4\pi Q\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

51.

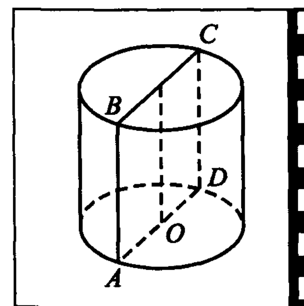


Рыс. 179

Указанне:
1) $OA = H$, $OB = R$, $S_{бак} = S_{асн}$;
2) $S_{бак} = 2\pi RH$, $S_{асн} = \pi R^2$;
3) $2\pi RH = \pi R^2$, $R = 2H$ (рыс. 179).

52. У π разоў.

53. 280π.



Рыс. 180

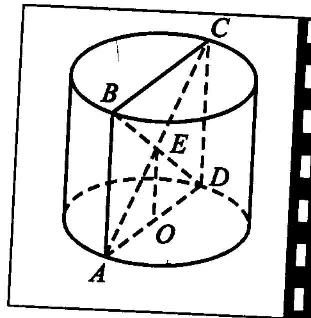
Указанне:
1) $V = 400\pi$, $S_{ABCD} = 80$, $OA = R$, $AB = H$ (рыс. 180);
2) $V = \pi R^2 H$, $400\pi = \pi R^2 H \Rightarrow RH = \frac{400}{R}$;
3) $S_{ABCD} = AD \cdot CD = 2R \cdot H$, $80 = 2RH$, $RH = 40$;

4) $\frac{400}{R} = 40$, $R = 10$, $H = 4$;

5) $S_{поўн} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 280\pi$.

54. $4S \operatorname{ctg}\alpha$.

55. $\sqrt[3]{\frac{4V \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi}}$.



Рыс. 181

Указанне:

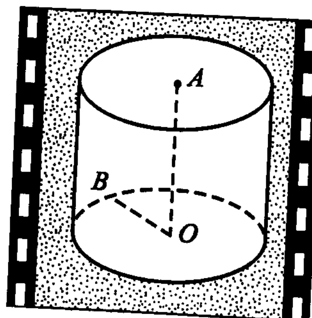
1) $V_ц = V$, $\angle AED = \alpha$, $CD = H$, $OD = R$ (рыс. 181);

2) ΔEOD, $OD = R = OE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

3) $V = \pi R^2 H$, $V = \pi\left(\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot H = \frac{\pi H^3}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow H = \sqrt[3]{\frac{4V \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi}}$.

56. $\frac{\pi}{8} m^3 \sin 2\alpha \cos\alpha$.

57. 6 см, 10 см.



Рыс. 182

Указанне:

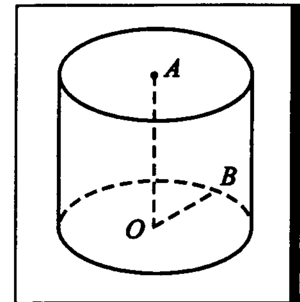
1) $S_ц = 192\pi$, $OA = H$, $OB = R$, $H = R + 4$ (рыс. 182);

2) $S_ц = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 4\pi R^2 + 8\pi R$;

3) $192\pi = 4\pi R^2 + 8\pi R$, $R^2 + 2R - 48 = 0$, $R = 6$, $H = 10$.

58. 360π см³.

59. Павялічыцца на 144π.



Рыс. 183

Указанне:

1) $OA = H$, $OB = R$, $H = 2R$, $R_1 = R + 2$, $H_1 = H - 3 = 2R - 3$, $S_б = S_б^1$ (рыс. 183);

2) $S_б = 2\pi RH = 4\pi R^2$, $S_б^1 = 2\pi R_1 H_1 = 2\pi(R+2)(2R-3)$;

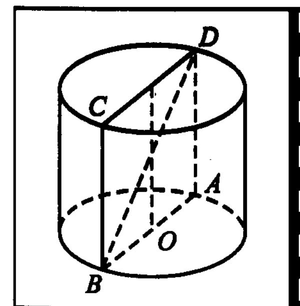
3) $4\pi R^2 = 2\pi(R+2)(2R-3) \Rightarrow R = 6$, $R_1 = 8$, $H_1 = 9$;

4) $V = \pi R^2 H = 2\pi R^3 = 432\pi$, $V_1 = \pi R_1^2 H_1 = 576\pi$;

5) $V_1 - V = 576\pi - 432\pi = 144\pi$.

60. 1, 4.

61. 289π.



Рыс. 184

Указанне:

1) $S_б = 120\pi$, $OB = R = 4$, $R_1 = \frac{BD}{2}$, $H_1 = 2R_1 = BD$ (рыс. 184);

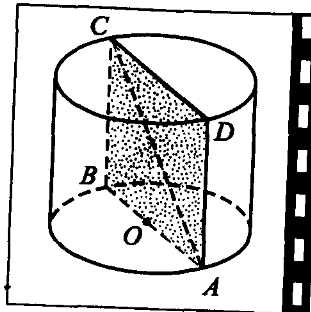
2) $S_б = 2\pi RH$, $120\pi = 8\pi H \Rightarrow H = 15$;

3) $BD = \sqrt{BA^2 + DA^2} = \sqrt{289} = 17$;

4) $S_{б_1} = 2\pi R_1 H_1 = \pi BD^2 = 289\pi$.

62. 45 см, 125 см.

63. 25.



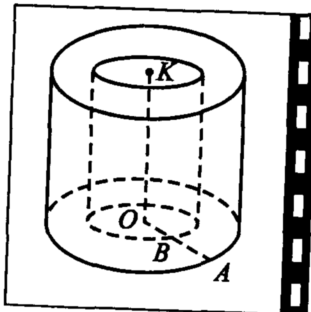
Рыс. 185

Указанне:

1) $S_ц = 456$, $AD = H = 7$, $OA = R$ (рыс. 185);
2) $S_ц = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 14\pi R$;
3) $456\pi = 2\pi R^2 + 14\pi R \Rightarrow$ $R^2 + 7R - 228 = 0$, $R = 12$;
4) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4R^2 + H^2} = 25$.

64. 6, 9.

65. 900π см^3, 450π см^2.



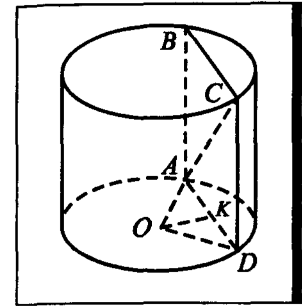
Рыс. 186

Указанне:

1) $OA = R = 7$, $OK = H = 20$;
2) $OB = R_1 = 2$, $H_1 = H$ (рыс. 186);
3) $V_1 = \pi R_1^2 H_1 = \pi R_1^2 H = 80\pi$, $V = \pi R^2 H = 980\pi$, $V_д = V - V_1 = 980\pi - 80\pi = 900\pi$ см^3;
4) $S_{пав.дэталі} = S - 2S_{асн.}^1 + S_б^1 = 2\pi R^2 + 2\pi RH - 2\pi R_1^2 + 2\pi R_1 H_1 = 450\pi$ см^2.

66. $\frac{3\pi a^3}{4}$.

67. 8 дм.



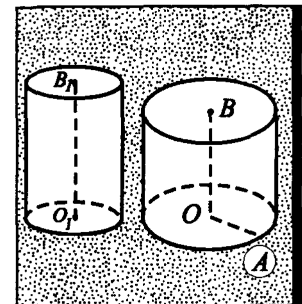
Рыс. 187

Указанне:

1) $OK = 4$, $OD = R$, $AC = 2R$ (рыс. 187);
2) ΔKDO, $DK = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - 4^2}$, $AD = 2DK = 2\sqrt{R^2 - 4^2}$;
3) ΔADC, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4R^2 - 64 + H^2}$, $2R = \sqrt{4R^2 - 64 + H^2} \Rightarrow H^2 = 64, H = 8$.

68. $4\sqrt{\pi^2 + 1}$ дм.

69. 8 см.



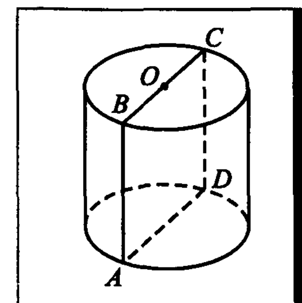
Рыс. 188

Указанне:

1) $AO = R$, $OB = H$, $H = 2R$, $R_1 = R + 2$, $H_1 = H - 2 = 2R - 2$, $S_ц^1 = S_ц + 96\pi$ (рыс. 188);
2) $S_ц = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2$, $S_ц^1 = 2\pi R_1^2 + 2\pi R_1 H_1 = 6\pi R^2 + 12\pi R$;
3) $96\pi = 12\pi R \Rightarrow R = 8$.

70. 4 см.

71. 5 см, 8 см.



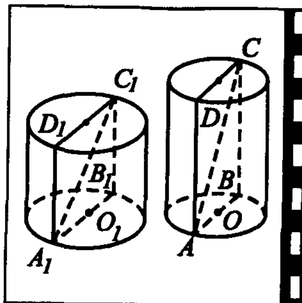
Рыс. 189

Указанне:

1) $S_ц = 130\pi$, $P_{ABCD} = 36$, $AB = H$, $OB = R$ (рыс. 189);
2) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(H + 2R)$, $36 = 2(H + 2R) \Rightarrow H = 18 - 2R$;
3) $S_ц = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R(18 - 2R) = 36\pi R - 2\pi R^2$, $130\pi = 36\pi R - 2\pi R^2$, $R^2 - 18R + 65 = 0 \Rightarrow R = 5$, $H = 8$ ($R = 13$ не задавальняе ўмове).

72. 768π см.

73. 9 см, 5 см.



Рыс. 190

Указанне:

1) $OA = R$, $BC = H$, $O_1A_1 = R_1$, $B_1C_1 = H_1$, $R_1 = R$, $S_б^1 : S_б = 5:9$, $AC = 15$, $A_1C_1 = 13$ (рыс. 190);

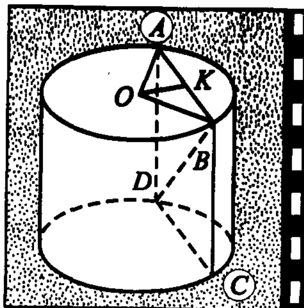
2) $S_б^1 = 2\pi R_1H_1$, $S_б = 2\pi RH$, $5:9 = 2\pi R_1H_1 : 2\pi RH$, $H_1 = \frac{5}{9}H$;

3) ΔABC, $H = \sqrt{AC^2 - AB^2}$, $H = \sqrt{225 - 4R^2}$, $\Delta A_1B_1C_1$, $H_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - A_1B_1^2}$, $H_1 = \sqrt{169 - 4R^2}$, $\frac{5H}{9} = \sqrt{169 - 4R^2}$;

4) $\sqrt{225 - 4R^2} = \frac{9}{5}\sqrt{169 - 4R^2}$, $R^2 = 36$, $H = 9$, $H_1 = 5$.

74. 13 дм.

75. 8 см.



Рыс. 191

Указанне:

1) $OK \perp AB$, $S_б = 80\pi$, $OK = 4$, $BD = 10$, $OA = R$, $BC = H$ (рыс. 191);

2) $S_б = 2\pi \cdot RH$, $80\pi = 2\pi RH$, $R = \frac{40}{H}$;

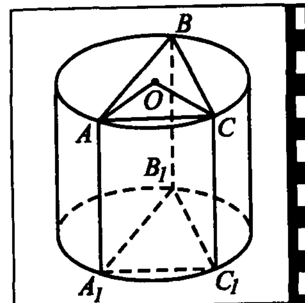
3) ΔOKA, $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - 16}$, $AB = 2AK = 2\sqrt{R^2 - 16} = 2\sqrt{\left(\frac{40}{H}\right)^2 - 16}$;

4) ΔDAB, $AB = \sqrt{DB^2 - DA^2} = \sqrt{100 - H^2}$;

5) $\sqrt{100 - H^2} = 2\sqrt{\left(\frac{40}{H}\right)^2 - 16}$, $H = 8$ ($H = 10$ не задавальняе ўмове).

76. 5 см.

77. 28π см².



Рыс. 192

Указанне:

1) $ABC = 60°$, $S_{A_1ABB_1} = 26$, $S_{B_1BCC_1} = 22$, $AB = a$, $BC = b$, $OA = R$, $AA_1 = H$ (рыс. 192);

2) $\angle ABC = 60° \Rightarrow \angle AOC = 120°$;

3) ΔABC, $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + b^2 - ab$;

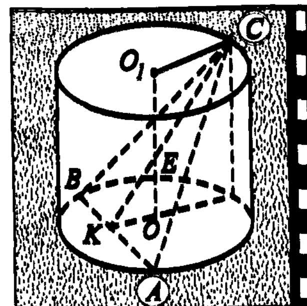
4) ΔAOC, $AC^2 = (2R\cos 30°)^2 = 3R^2$;

5) $S_{A_1ABB_1} = aH$, $26 = aH$, $a = \frac{26}{H}$, $S_{B_1BCC_1} = bH$, $22 = bH$, $b = \frac{22}{H}$;

6) $a^2 + b^2 - ab = 3R^2$, $\left(\frac{26}{H}\right)^2 + \left(\frac{22}{H}\right)^2 - \frac{26}{H}\cdot\frac{22}{H} = 3R^2$, $HR = 14$, $S_{бак} = 2\pi RH = 28\pi$.

78. 10 см.

79. 24 см.



Рыс. 193

Указанне:

1) $BC = AC$, $AB = 32$, $S_{ABC} = 640$, $OO_1 = H$, $OA = R$, $CK \perp BA$, $OE : EO_1 = 3:5$ (рыс. 193);

2) $S_{ABC} = \frac{CK\cdot AB}{2}$, $640 = \frac{CK\cdot 32}{2}$, $CK = 40$;

3) $\Delta KOE \sim \Delta CO_1E$, $R : OK = 5:3 \Rightarrow OK = \frac{3R}{5}$;

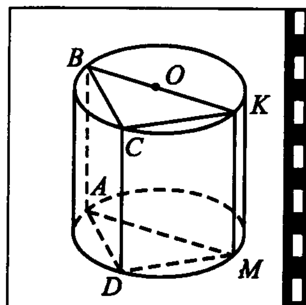
4) ΔAKO, $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - 16^2}$;

5) $\frac{3R}{5} = \sqrt{R^2 - 16^2} \Rightarrow R = 20$, $OK = 12$;

6) $H = \sqrt{CK^2 - (R + OK)^2} = 24$.

80. $39\sqrt{3}\pi$ см^2.

81. 170 см^2.



Рыс. 194

Указанне:

1) $(BCDA) \perp (KCDM)$, $P_{BCDA} = 36$, $P_{KCDM} = 50$, $S_{BCDA} - S_{KCDM} = 70$, $OB = R$, $DC = H$ (рыс. 194);

2) $P_{BCDA} = 2(H + BC)$, $36 = 2(H + BC)$, $H = 18 - BC$;

3) $P_{KCDM} = 2(H + CK)$, $50 = 2(H + CK)$, $H = 25 - CK$;

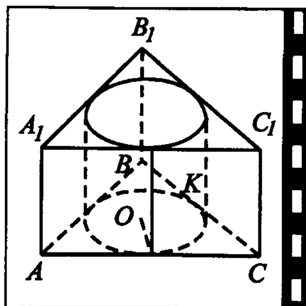
4) $18 - BC = 25 - CK \Rightarrow CK - BC = 7$;

5) $S_{BCDA} = BC \cdot H$, $S_{KCDM} = CK \cdot H$, $70 = H(CK - BC)$, $H = 10$, $BC = 8$, $CK = 15$;

6) ΔBCK, $BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = 17$, $S_{BKMA} = BK \cdot H = 170$.

82. 400 см^2.

83. 96π см^2.



Рыс. 195

Указанне:

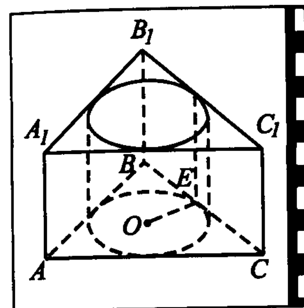
1) $H = 2R$, $P_{ABC} = 42$, $S_{пр} = 504$, $AA_1 = H$, $OK = R$ (рыс. 195);

2) $S_{пр} = 2S_{ABC} + S_{бак}$, $S_{ABC} = \frac{P_{ABC} \cdot R}{2}$, $S_{бак} = P_{ABC} \cdot H$, $S_{пр} = P_{ABC}(R + H)$, $504 = 42(R + H) \Rightarrow R + H = 12$, або $3R = 12$, $R = 4$;

3) $S_ц = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2 = 96\pi$.

84. 64π см^2.

85. 96π см^2.



Рыс. 196

Указанне:

1) $H = 2R$, $V_{прыз} = 672$, $S_{прыз} = 504$, $OE = R$, $AA_1 = H$ (рыс. 196);

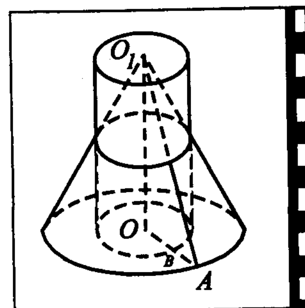
2) $V_{прыз} = S_{ABC} \cdot H = S_{ABC} 2R = \frac{1}{2} P_{ABC} R \cdot 2R = R^2 P_{ABC}$, $672 = R^2 P_{ABC}$, $P_{ABC} = \frac{672}{R^2}$;

3) $S_{прыз} = 2S_{ABC} + S_{бак} = P_{ABC} \cdot R + P_{ABC} \cdot H = P_{ABC} \cdot 3R$, $504 = 3R \frac{672}{R^2}$, $R = 4$;

4) $S_ц = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2 = 96\pi$ см^2.

86. 4 см.

87. 900π см^3.



Рыс. 197

Указанне:

1) $OA = 12$, $OB = 10$, $OO_1 = H$, $S_{бак.к.} = S_{бак.ц.}$ (рыс. 197);

2) $S_{бак.к.} = \pi OA \cdot O_1A = 12\pi\sqrt{OA^2 + H^2} = 12\pi\sqrt{12^2 + H^2}$;

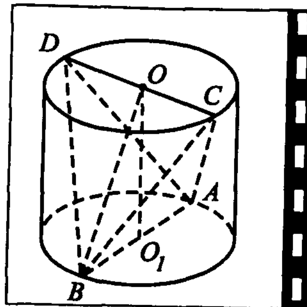
3) $S_{бак.ц.} = 2\pi OB \cdot H = 20\pi H$;

4) $12\pi\sqrt{12^2 + H^2} = 20\pi H \Rightarrow H = 9$ см;

5) $V_ц = \pi OB^2 \cdot H = 900\pi$.

88. 720π см^3.

89. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$, $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.



Рыс. 198

Указанне:

1) $AB = a$, $OD = R$, $OB = h$, $OO_1 = H$ (рыс. 198);

2) $R = \frac{a}{2}$, ΔDOB,

$h = \sqrt{DB^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

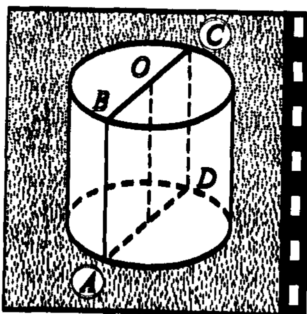
3) ΔOBO_1, $H = OO_1 =$

$= \sqrt{OB^2 - BO_1^2} = \sqrt{h^2 - R^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

4) $V_ц = \pi R^2 H = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$, $S_б = 2\pi RH = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

90. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$, $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

91. $\frac{\pi p^3}{32}$.



Рыс. 199

Указанне:

1) $P_{ABCD} = 2p$, $S_{бак}$ – найбольшая, $AB = H$, $OB = R$ (рыс. 199);

2) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(H + 2R)$, $2p = 2(H + 2R)$, $H = p - 2R$;

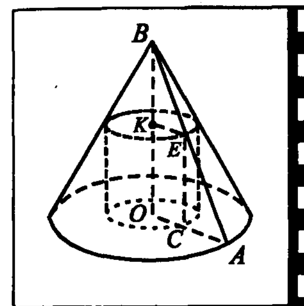
3) $S_{бак} = 2\pi RH = 2\pi pR - 4\pi R^2$;

4) $S'_{бак} = 2\pi p - 8\pi R = 0 \Rightarrow R = \frac{p}{4}$, $H = \frac{p}{2}$;

5) $V = \pi R^2 \cdot H = \frac{\pi p^3}{32}$.

92. $\frac{4\pi p^3}{125}$, $\frac{4\pi p^2}{25}$.

93. $\frac{125\pi}{2}$ см^3.



Рыс. 200

Указанне:

1) $OA = 6$, $OB = 15$, $S_ц$ – найбольшая, $OK = h$, $OC = r$ (рыс. 200);

2) $\Delta ACE \sim \Delta BOA$, $AC : OA = EC : OB$, $(6 - r) : 6 = h : 15 \Rightarrow h = 15 - 2{,}5r$;

3) $S_ц = 2\pi r^2 + 2\pi rh =$

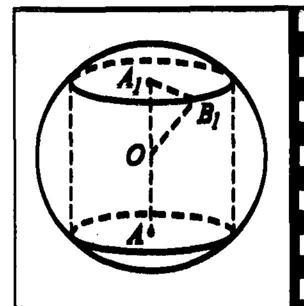
$= 2\pi(r^2 + 15r - 2{,}5r^2) = 2\pi(15r - 1{,}5r^2)$;

4) $S'_ц = 2\pi(15 - 3r) = 0 \Rightarrow r = 5$, $h = 2{,}5$;

5) $V_ц = \pi r^2 h = \frac{125\pi}{2}$.

94. $\frac{\pi r^2 h(R - r)}{R}$ пры $r = \frac{2R}{3}$.

95. $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$.



Рыс. 201

Указанне:

1) O – цэнтр шара, R – радыус шара, $AA_1 = H$, $A_1B_1 = R_1$, $S_{бак}$ – найбольшая (рыс. 201);

2) ΔOA_1B_1, $A_1B_1 = \sqrt{OB_1^2 - OA_1^2}$,

$R_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}$;

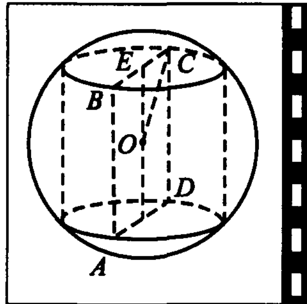
3) $S_{бак} = 2\pi R_1 H = \pi\sqrt{4H^2R^2 - H^4}$;

4) $S'_{бак} = \dfrac{\pi(8R^2H - 4H^3)}{2\sqrt{(4H^2R^2 - H^4)}} = 0 \Rightarrow H = R\sqrt{2}, \; R_1 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$;

5) $V_ц = \pi R_1^2 H = \dfrac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$.

96. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^2$.

97. $\dfrac{3a}{10}$.



Рыс. 202

Указание:

1) $P_{ABCD} = 2a$, O – цэнтр шара, R_1 – радыус шара, $EC = R$, $AB = H$, $S_ш - S_ц$ – найменшая (рыс. 202);

2) $P_{ABCD} = 2(AD + DC) = 2(2R + H)$, $2a = 2(2R + H) \Rightarrow H = a - 2R$;

3) $S_ц = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi aR - 2\pi R^2$;

4) ΔOEC, $OC = \sqrt{OE^2 + EC^2}$, $R_1 = \sqrt{R^2 + \dfrac{H^2}{4}}$, $S_ш = 4\pi R_1^2 = 8\pi R^2 + \pi a^2 - 4\pi aR$;

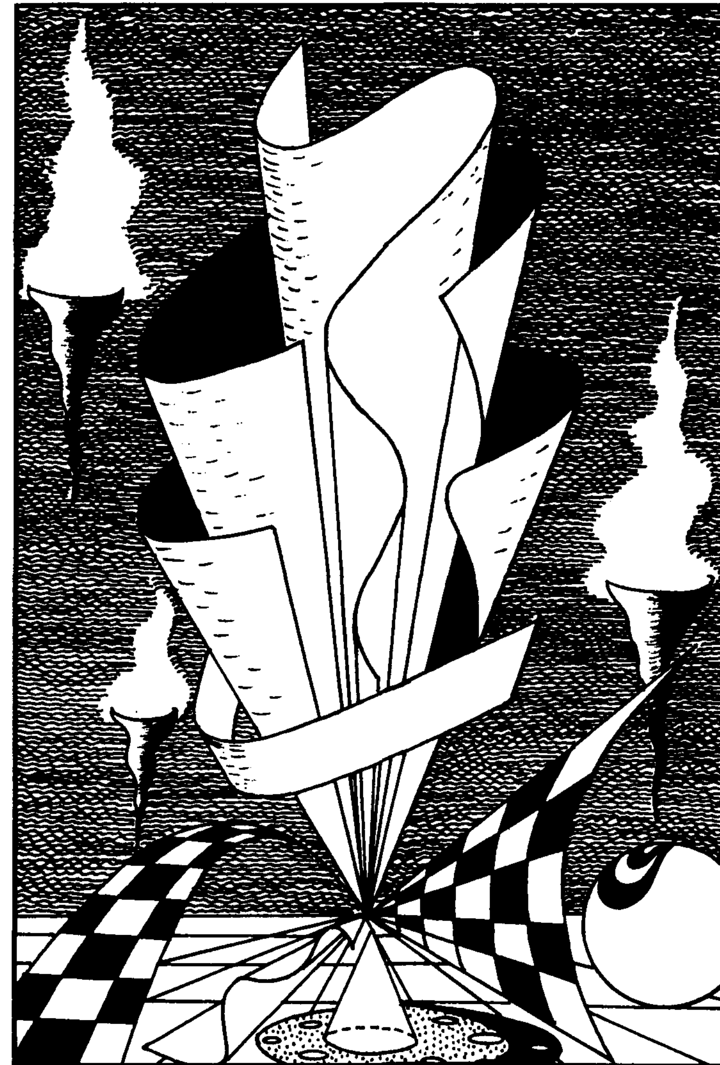
5) $S_ш - S_ц = 10\pi R^2 + \pi a^2 - 6\pi aR$;

6) $(S_ш - S_ц)' = 20\pi R - 6\pi a = 0$, $R = \dfrac{3a}{10}$.

98. $\dfrac{a}{6}$.

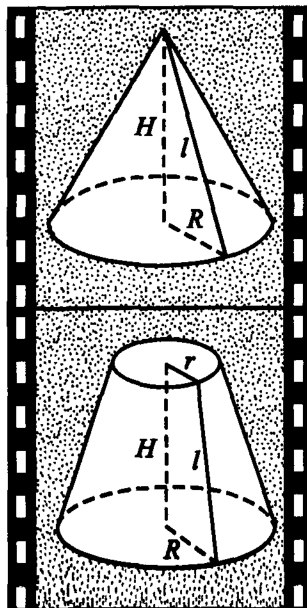
5

Конус



5. КОНУС

5.1. Формулы, задачы



Рыс. 203

1. **Конус** (R – радыус асновы; H – вышыня; l – утваральная; $S_{бак}$ – плошча бакавой паверхні; V – аб'ём; $S_{поўн}$ – плошча поўнай паверхні).

1) $S_{бак} = \pi R l$;

2) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;

3) $S_{поўн} = \pi R(R + l)$.

2. **Усечаны конус** (R, r – радыусы асноў; $S_{бак}$ – плошча бакавой паверхні; $S_{поўн}$ – плошча поўнай паверхні, l – утваральная; H – вышыня; V – аб'ём).

1) $S_{бак} = \pi(R + r)\cdot l$;

2) $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$;

3) $S_{поўн} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)\cdot l$.

3. Конус, апісаны каля піраміды. Для таго, каб каля піраміды можна было апісаць конус, неабходна і дастаткова, каб бакавыя канты піраміды былі роўныя.

4. Конус, упісаны ў піраміду. Для таго, каб у піраміду можна было ўпісаць конус, неабходна і дастаткова, каб у аснову піраміды можна было ўпісаць акружнасць, а вяршыня піраміды артаганальна праецыравалася б у цэнтр гэтай акружнасці.

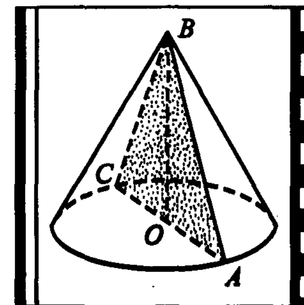
5. **Конус, упісаны ў сферу.** Каля любога конуса можна апісаць сферу.

6. **Конус, апісаны каля сферы.** У любы конус можна ўпісаць сферу.

7. **Усечаны конус, упісаны ў сферу.** Каля ўсякага усечанага конуса можна апісаць сферу.

8. **Усечаны конус, апісаны каля сферы.** Ва ўсечаны конус можна ўпісаць сферу толькі ў тым выпадку, калі ўтваральная конуса роўная суме радыусаў асноў конуса.

Задача 1. Плошча восевага сячэння конуса роўная 12, а даўжыня яго ўтваральнай роўная 5. Знайдзіце адносіну аб'ёму конуса да плошчы яго бакавой паверхні.

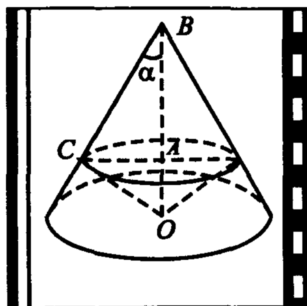


Рыс. 204

Рашэнне. Няхай трохвугольнік ABC – восевае сячэнне конуса, пункт O – цэнтр асновы (рыс. 204). Тады $S_{ABC} = OA\cdot OB = 12$, $V = \frac{1}{3}\pi OA^2\cdot OB$, $S_{бак} = \pi OA\cdot AB$.

Значыць, $V : S_{бак} = \left(\frac{1}{3}\pi OA^2\cdot OB\right) : (\pi OA\cdot AB) = (OA\cdot OB) : (3AB) = 12 : 15 = 4 : 5$.

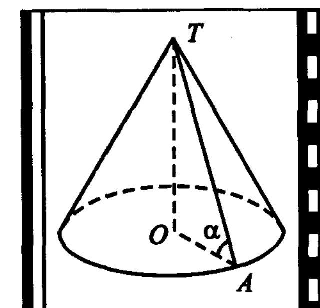
Задача 2. Вышыня конуса роўная H, вугал паміж утваральнай і вышынёй α. У гэты конус упісаны другі конус так, что вяршыня другога конуса супадае з цэнтрам асновы першага конуса, а адпаведныя ўтваральныя двух конусаў узаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце аб'ём упісанага конуса.



Рыс. 205

Рашэнне. Няхай пункты O і A – цэнтры асноў конусаў, а пункт C – агульны пункт асновы ўпісанага конуса і ўтваральнай большага конуса (рыс. 205). Па ўмове задачы $BO = H$, $\angle OCB = 90°$, $\angle CBO = \alpha$. У трохвугольніку BCO катэт $OC = OB\sin\alpha = H\sin\alpha$. З прамавугольнага трохвугольніка OAC ($\angle CAO = 90°$, $\angle ACO = 90°-(90°-\alpha) = \alpha$) знаходзім $AC = OC\cos\alpha = H\sin\alpha\cos\alpha$, $OA = OC\sin\alpha = H\sin^2\alpha$. Такім чынам, аб'ём упісанага конуса $V = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot OA = \frac{1}{3}H^3\pi\sin^4\alpha\cos^2\alpha$.

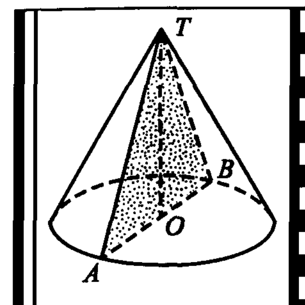
Задача 3. Вугал нахілу ўтваральнай конуса да асновы роўны α. Знайдзіце бакавую паверхню, калі аб'ём конуса роўны V.



Рыс. 206

Рашэнне. Няхай радыус асновы $OA = r$ (рыс. 206). У прамавугольным трохвугольніку TOA гіпатэнуза $TA = l = \frac{OA}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}$, а катэт $TO = h = OA\,\text{tg}\,\alpha = r\,\text{tg}\,\alpha$. Падстаўляючы h у формулу аб'ёму конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, атрымліваем $V = \frac{1}{3}\pi r^3 tg\alpha$. Значыць, $r = \sqrt[3]{\frac{3V\,\text{ctg}\,\alpha}{\pi}}$. Цяпер знаходзім плошчу бакавой паверхні $S_{бак} = \pi r l = \frac{\sqrt[3]{\pi 9V^2 ctg^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

Задача 4. Плошча восевага сячэння конуса роўная S, а плошча яго бакавой паверхні роўная πQ. Знайдзіце плошчу асновы конуса.

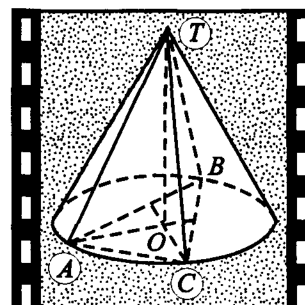


Рыс. 207

Рашэнне. Па ўмове задачы
$S = \frac{1}{2}AB \cdot TO = RH$, $S_{бак} = \pi Rl = \pi Q$.
Значыць, $\pi Rl : RH = \pi Q : S$, або $l : H = Q : S$. Адсюль знаходзім $H = \frac{Sl}{Q}$. З прамавугольнага трохвугольніка TOB катэт $OB = R = \sqrt{TB^2 - TO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{(Sl)^2}{Q^2}} = \frac{l\sqrt{Q^2 - S^2}}{Q}$. Адсюль $l = \frac{QR}{\sqrt{Q^2 - S^2}}$. Такім чынам, бакавая паверхня конуса $S_{бак} = \pi Q = \pi Rl = \pi R\frac{QR}{\sqrt{Q^2 - S^2}}$.

Значыць, $R^2 = \sqrt{Q^2 - S^2}$, а плошча асновы конуса $S_{асн} = \pi R^2 = \pi\sqrt{Q^2 - S^2}$ (рыс. 207).

Задача 5. Плоскія вуглы пры вяршыні правільнай трохвугольнай піраміды прамыя. Знайдзіце поўную паверхню конуса, апісанага каля піраміды, калі вышыня піраміды роўная H.



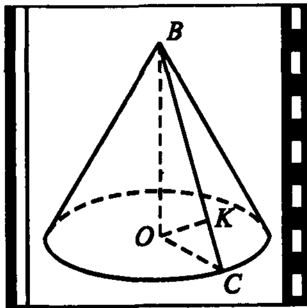
Рыс. 208

Рашэнне. Плоскія вуглы пры вяршыні піраміды $TABC$ (рыс. 208) – прамыя, таму справядлівая роўнасць $\frac{1}{TO^2} = \frac{1}{TA^2} + \frac{1}{TB^2} + \frac{1}{TC^2}$ (Пункт O – цэнтр асновы). Няхай $AT = x$, тады $\frac{1}{H^2} = \frac{3}{x^2}$, $x = H\sqrt{3}$. У прамавугольным трохвугольніку ATC гіпатэнуза $AC =$

$=\sqrt{AT^2+TC^2}=x\sqrt{2}=H\sqrt{6}$. Радыус акружнасці, апісанай каля роўнастаронняга трохвугольніка ABC, $R=\frac{AC\sqrt{3}}{3}=\frac{H\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=H\sqrt{2}$.

Такім чынам, поўная паверхня конуса $S_{поўн}=\pi R(R+l)=\pi H\sqrt{2}(H\sqrt{2}+$ $+H\sqrt{3})=\pi H^2(2+\sqrt{6})$.

Задача 6. Адлегласць ад цэнтра асновы конуса да яго ўтваральнай роўная a. Знайдзіце бакавую паверхню конуса, калі вышыня конуса роўная H.



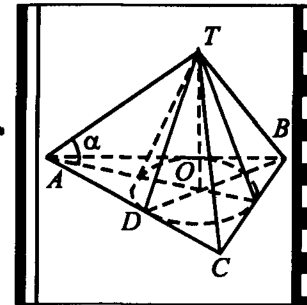
Рыс. 209

Рашэнне. Няхай пункт O – цэнтр асновы конуса, OK – перпендыкуляр да ўтваральнай BC (рыс. 209). Тады $OK=a$, $BO=H$. Абазначым OC праз x. Паколькі $S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC=\frac{1}{2}Hx$, $S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OK=$ $=\frac{a}{2}\sqrt{H^2+x^2}$, то $Hx=a\sqrt{H^2+x^2}$.

Адсюль знаходзім $x=\frac{aH}{\sqrt{H^2-a^2}}$. У прамавугольным трохвугольніку BOC гіпатэнуза $BC=\sqrt{BO^2+OC^2}=$ $=\frac{H^2}{\sqrt{H^2-a^2}}$. Значыць, бакавая паверхня конуса $S_{бак}=\pi Rl=$

$=\pi\cdot x\cdot BC=\pi\frac{aH}{\sqrt{H^2-a^2}}\cdot\frac{H^2}{\sqrt{H^2-a^2}}=\frac{\pi aH^3}{H^2-a^2}$.

Задача 7. У правільную трохвугольную піраміду ўпісаны конус. Старана асновы піраміды роўная a. Канты піраміды ўтвараюць з плоскасцю асновы вугал α. Знайдзіце аб'ём конуса.



Рыс. 210

Рашэнне. Няхай $TABC$ – апісаная каля конуса піраміда, $AB=BC=CA=a$, $\angle TAO=\alpha$, $OD=R$ – радыус асновы, $TO=H$ – вышыня конуса. Вышыня правільнай трохвугольнай піраміды супадае з вышынёй конуса. Старана AC перпендыкулярная радыусу OD. У прамавугольным трохвугольніку ADO ($\angle ADO=90°$, $\angle OAD=30°$, $AD=\frac{a}{2}$) гіпатэнуза $AO=\frac{AD}{\cos 30°}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ і катэт $OD=AD\,\mathrm{tg}\,30°=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. З прамавугольнага трохвугольніка AOT ($\angle AOT=90°$, $\angle TAO=\alpha$, $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$) знаходзім катэт $TO=AO\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{3}\mathrm{tg}\,\alpha$. Такім чынам, аб'ём конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi OD^2\cdot TO=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{108}\mathrm{tg}\,\alpha$ (рыс. 210).

5.2. Задачы

1. Вугал пры вяршыні восевага сячэння конуса роўны 2β, а перыметр восевага сячэння роўны $2p$. Знайдзіце поўную паверхню конуса.

2. Плошча восевага сячэння конуса роўная S, а вугал паміж утваральнымі роўны 2α. Знайдзіце аб'ём конуса.

3. Вугал пры вяршыні восевага сячэння конуса роўны φ, а сума даўжынь яго вышыні і ўтваральнай роўная a. Знайдзіце аб'ём конуса.

7. Зак. 3319.

4. Вугал пры вяршыні восевага сячэння прамога кругавога конуса роўны α, а плошча бакавой паверхні – S. Знайдзіце аб'ём конуса.

5. Знайдзіце аб'ём конуса, разгорткай якога з'яўляецца паўкруг радыуса R.

6. Радыус асновы конуса роўны R, а вугал разгорткі яго бакавой паверхні роўны $90°$. Знайдзіце аб'ём конуса.

7. Бакавая паверхня конуса з утваральнай l разгорнута ў сектар, цэнтральны вугал якога роўны $\frac{6\pi}{5}$. Знайдзіце аб'ём конуса.

8. Аб'ём конуса роўны $\frac{\pi\sqrt{143}}{3}$. Велічыня вугла разгорткі бакавой паверхні конуса роўная $30°$. Якая даўжыня яго ўтваральнай?

9. Утваральная конуса нахілена да плоскасці асновы пад вуглом $60°$. Знайдзіце адносіну плошчы бакавой паверхні конуса да плошчы яго асновы.

10. Вышыня конуса роўная дыяметру яго асновы. Знайдзіце квадрат адносіны плошчы яго асновы да плошчы бакавой паверхні.

11. Адлегласць ад цэнтра асновы конуса да яго ўтваральнай роўная a. Вугал паміж утваральнай і вышынёй роўны α. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні конуса.

12. Рознасць паміж утваральнай конуса і яго вышынёй роўная a, а вугал паміж імі роўны α. Знайдзіце аб'ём конуса.

13. Плошча бакавой паверхні конуса роўная S, поўнай паверхні – P. Знайдзіце вугал паміж вышынёй і ўтваральнай.

14. Плошча бакавой паверхні конуса роўная P, вугал паміж вышынёй і ўтваральнай роўны β. Знайдзіце аб'ём конуса.

15. У шар упісаны конус, утваральная якога роўная дыяметру асновы. Знайдзіце адносіну поўнай паверхні гэтага конуса да паверхні шара.

16. Вышыня конуса роўная дыяметру яго асновы, а аб'ём конуса роўны V. Знайдзіце аб'ём шара, апісанага каля конуса.

17. У шар радыуса R упісаны конус, утваральная якога складае з плоскасцю асновы вугал α. Вылічыце аб'ём конуса.

18. Вакол конуса, вугал нахілу ўтваральнай якога да плоскасці асновы α, апісаны шар. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў дадзенага конуса і шара.

19. Знайдзіце адносіну аб'ёму шара да аб'ёму ўпісанага ў яго конуса, калі ўтваральная конуса ў a разоў большая за радыус яго асновы.

20. У шар, аб'ём якога роўны V, упісаны конус. Вугал, складзены дзвюма ўтваральнымі конуса, праведзенымі да канцоў аднаго і таго ж дыяметра асновы конуса, роўны α. Знайдзіце аб'ём конуса.

21. У конус упісаны шар, паверхня якога роўная плошчы асновы конуса. Знайдзіце косінус вугла пры вяршыні ў восевым сячэнні конуса.

22. Знайдзіце адносіну плошчы паверхні і аб'ёму шара адпаведна да плошчы поўнай паверхні і аб'ёму апісанага вакол яго конуса з роўнастароннім трохвугольнікам у восевым сячэнні.

23. Вышыня конуса ў чатыры разы большая за радыус шара, упісанага ў гэты конус. Утваральная конуса роўная a. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса.

24. У прамым кругавым конусе ўтваральная роўная l, а вышыня ў m разоў большая за радыус шара, упісанага ў конус. Знайдзіце адносіну поўнай паверхні конуса да паверхні шара, апісанага каля гэтага конуса.

25. Аб'ём конуса ў m разоў большы за аб'ём упісанага ў яго шара. Знайдзіце вугал паміж утваральнай і плоскасцю асновы пры найменшым магчымым значэнні m.

26. Поўная паверхня конуса ў n разоў большая за паверхню ўпісанага ў яго шара ($n \geq 2$). Знайдзіце вугал нахілу ўтваральнай конуса да плоскасці яго асновы.

27. У конус упісаны шар. Адносіна аб'ёму шара да аб'ёму конуса роўная g. Знайдзіце вугал паміж утваральнай і плоскасцю асновы конуса. Вызначыце дапушчальныя значэнні g.

28. У конус упісаны шар. Плошча паверхні шара роўная плошчы асновы конуса. Знайдзіце вугал паміж утваральнай конуса і плоскасцю яго асновы.

29. У конус упісаны шар. Знайдзіце аб'ём шара, калі ўтваральная конуса роўная l і нахілена да асновы конуса пад вуглом α.

30. У конус, утваральная якога нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α, упісаны шар. Аб'ём конуса роўны V. Знайдзіце плошчу паверхні шара.

31. Пад якім вуглом нахілена ўтваральная конуса да асновы, калі плошча поўнай паверхні конуса ў два разы большая за плошчу паверхні ўпісанага ў яго шара?

32. У конус з вуглом φ паміж утваральнай і плоскасцю асновы ўпісаны шар. Знайдзіце адносіну аб'ёму конуса да аб'ёму шара.

33. Адносіна радыуса асновы прамога кругавога конуса да радыуса ўпісанага ў конус шара роўная b. Знайдзіце адносіну аб'ёму конуса да аб'ёму шара.

34. У прамы кругавы конус, бакавая паверхня якога у k разоў большая за плошчу асновы, упісаны шар радыуса R. Знайдзіце аб'ём конуса.

35. У конус упісаны шар. Паверхня шара адносіцца да плошчы асновы конуса як 4 : 3. Знайдзіце вугал пры вяршыні конуса.

36. Вугал пры вяршыні восевага сячэння конуса роўны 2α, а вышыня конуса роўная H. Знайдзіце аб'ём упісанага ў гэты конус шара, а таксама плошчу поўнай паверхні конуса.

37. Вышыня конуса роўная 8, а ўтваральная – 10. Знайдзіце радыус упісанага шара.

38. У конус, вышыня якога роўная радыусу асновы, упісаны шар. Знайдзіце адносіну аб'ёму шара да аб'ёму конуса.

39. У конус упісаны шар. Вугал паміж вышынёй конуса і яго ўтваральнай роўны α. Знайдзіце адносіну аб'ёму конуса да аб'ёму шара.

40. У конус упісаны шар. Знайдзіце аб'ём конуса, калі радыус шара роўны R, а вугал паміж вышынёй і ўтваральнай конуса роўны α.

41. На вышыні конуса як на дыяметры пабудавана сфера, якая перасякае конус па некаторай акружнасці. Знайдзіце радыус акружнасці, калі ўтваральная конуса роўная a, а вугал восевага сячэння роўны α.

42. Цэнтр сферы супадае з цэнтрам асновы конуса, а ее радыус роўны радыусу асновы конуса. Знайдзіце радыус акружнасці, па якой сфера перасякае паверхню конуса, калі вядомыя вышыня конуса H і вугал пры вяршыні восевага сячэння α.

43. У конус упісаны шар. Радыус акружнасці, па якой датыкаюцца конус і шар, роўны r. Знайдзіце аб'ём конуса, калі вугал паміж вышынёй і ўтваральнай роўны α.

44. У прамы кругавы конус упісаны шар. Радыус круга дотыку паверхні шара і бакавой паверхні конуса роўны r. Прамая, якая злучае цэнтр шара з адвольным пунктам акружнасці асновы конуса, складае з вышынёй конуса востры вугал α. Знайдзіце аб'ём конуса.

45. У прамы кругавы конус упісаны шар радыуса R. Радыус акружнасці, па якой бакавая паверхня конуса датыкаецца да шара, роўны $\frac{3}{5}R$. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса.

46. У конус упісаны шар. Лініяй іх дотыку паверхня шара дзеліцца ў адносіне $m : n$. Знайдзіце вугал паміж утваральнай конуса і яго воссю.

47. Шар радыуса R упісаны ў конус. З цэнтра шара ўтваральная конуса відаць пад вуглом α. Знайдзіце аб'ём конуса.

48. У прамым кругавым конусе дадзены плошча асновы S_1 і плошча бакавой паверхні S_2. Знайдзіце радыус упісанага шара.

49. Каля шара радыуса R апісаны конус, утваральная якога нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні конуса.

50. Радыус упісанай у конус сферы роўны R. Знайдзіце аб'ём конуса, калі цэнтр апісанай вакол конуса сферы супадае з цэнтрам упісаной сферы.

51. Сума даўжынь радыуса асновы і ўтваральнай конуса роўная n; утваральная складае з асновай вугал α. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні конуса.

52. Утваральная конуса нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α. Знайдзіце аб'ём конуса, калі яго поўная паверхня роўная S.

53. Восевым сячэннем цыліндра з'яўляецца квадрат, а восевым сячэннем конуса – правільны трохвугольнік, роўнавялікі квадрату. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндра і конуса.

54. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндра і конуса, упісаных у адзін і той жа шар, калі вышыня і цыліндра, і конуса роўная радыусу шара.

55. Сячэнне конуса, паралельнае яго аснове, праходзіць праз цэнтр апісанага каля конуса шара. Аб'ём адсечанага конуса роўны палавіне аб'ёму конуса. Знайдзіце вугал нахілу ўтваральнай конуса да плоскасці яго асновы.

56. Знайдзіце радыус сячэння, якое паралельна аснове і дзеліць аб'ём конуса папалам, калі вядома, што радыус асновы конуса роўны r.

57. У правільную трохвугольную ўсечаную піраміду з двухгранным вуглом α пры аснове ўпісаны ўсечаны конус. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса, калі апафема бакавой грані піраміды роўная суме радыусаў асноў конуса, а радыус меншай асновы конуса роўны r.

58. Усечаны конус і правільная шасцівугольная прызма размешчаны так, што верхняя аснова ўсечанага конуса ўпісана ў верхнюю аснову прызмы, а ніжняя аснова ўсечанага конуса

апісана каля ніжняй асновы прызмы. Вядома, што вышыня ўсечанага конуса роўная суме радыусаў яго асноў. Знайдзіце адносіну велічынь бакавых паверхняў гэтых цел.

59. Дыяганаль восевага сячэння ўсечанага конуса пунктам перасячэння дыяганалей дзеліцца ў адносіне 2 : 1, лічачы ад большай асновы. Вугал паміж дыяганалямі, павернуты да асноў конуса, роўны α. Даўжыня дыяганалі роўная l. Знайдзіце аб'ём усечанага конуса.

60. Ва ўсечаным конусе дыяганалі восевага сячэння ўзаемна перпендыкулярныя, а ўтваральная складае з плоскасцю ніжняй асновы вугал α і роўная 1. Знайдзіце аб'ём усечанага конуса.

61. Знайдзіце аб'ём шара, упісанага ва ўсечаны конус, утваральная якога роўная 10 і складае вугал у 45° з плоскасцю асновы.

62. Знайдзіце аб'ём шара, апісанага каля ўсечанага конуса, у якога радыус меншай асновы ў 5 разоў меншы за радыус большай асновы, утваральная роўная $2\sqrt{5}$ і складае з асновай вугал $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

63. Дзве ўзаемна перпендыкулярныя ўтваральныя прамога кругавога конуса дзеляць акружнасць асновы ў адносіне 1 : 2. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса, калі вышыня яго роўная h.

64. Вугал пры вяршыні восевага сячэння конуса роўны 150°. Праз вяршыню конуса праведзена сячэнне, якое з'яўляецца прамавугольным трохвугольнікам. Знайдзіце вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы конуса.

65. Радыус асновы конуса роўны R, а ўтваральная нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α. У гэтым конусе праз яго вяршыню праведзена плоскасць пад вуглом φ да вышыні конуса. Знайдзіце плошчу атрыманага сячэння.

66. Праз вяршыню конуса праведзена сячэнне пад вуглом 30° да вышыні конуса. Вылічыце плошчу сячэння, калі вышыня конуса роўная $3\sqrt{3}$, а радыус асновы роўны 5.

67. Праз вяршыню конуса пад вуглом φ да яго асновы праведзена плоскасць сячэння. Адлегласць ад цэнтра асновы конуса да плоскасці сячэння роўная d і складае палову ўтваральнай. Знайдзіце аб'ём конуса.

68. Утваральная прамога кругавога конуса мае даўжыню l і складае з вышынёй вугал α. Праз дзве ўтваральныя конуса, якія складаюць паміж сабой вугал 2β, праведзена плоскасць. Знайдзіце адлегласць ад гэтай плоскасці да цэнтра ўпісанага ў конус шара.

69. Вышыня конуса складае з утваральнай вугал α. Праз вяршыню конуса праведзена плоскасць пад вуглом β да плоскасці асновы. Знайдзіце плошчу сячэння, калі вышыня конуса роўная h.

70. Праз дзве ўтваральныя конуса, вугал паміж якімі роўны α, праведзена плоскасць. Знайдзіце адносіну плошчы сячэння да плошчы поўнай паверхні конуса, калі ўтваральная конуса складае з плоскасцю асновы вугал β.

71. У конус упісана правільная шасцівугольная піраміда так, што іх вяршыні і плоскасці асноў супадаюць. Знайдзіце аб'ём і плошчу бакавой паверхні конуса, калі бакавыя грані піраміды складаюць вугал $\frac{\pi}{3}$ з асновай, а даўжыня стараны асновы роўная 2.

72. У правільную шасцівугольную піраміду ўпісаны прамы конус і каля яе апісан прамы конус. Дадзены вышыня піраміды H і радыус асновы апісанага конуса R. Знайдзіце рознасць аб'ёмаў апісанага і ўпісанага конусаў.

73. У правільную чатырохвугольную піраміду са стараной a і апафемай m упісаны конус. Знайдзіце плошчу яго поўнай паверхні.

74. Аб'ём конуса роўны 7π. Знайдзіце аб'ём правільнай чатырохвугольнай піраміды, упісанай у конус.

75. У аснову конуса ўпісаны квадрат, старана якога роўная a. Плоскасць, якая праходзіць праз вяршыню конуса і адну са старон гэтага квадрата, дае ў сячэнні з паверхняй конуса трохвугольнік, вугал пры вяршыні якога роўны α. Знайдзіце аб'ём конуса.

76. Даўжыня ўтваральнай конуса роўная l, вугал утваральнай з плоскасцю асновы роўны α. Знайдзіце аб'ём апісанай каля конуса піраміды, асновай якой служыць ромб з вострым вуглом β.

77. Аб'ём конуса, упісанага ў правільную чатырохвугольную піраміду, роўны Q. Двухгранны вугал, утвораны сумежнымі бакавымі гранямі піраміды, роўны α. Знайдзіце даўжыню стараны асновы піраміды.

78. Вышыня конуса роўная h. Плоскія вуглы пры вяршыні правільнай чатырохвугольнай піраміды, упісанай у гэты конус, роўныя α. Знайдзіце аб'ём конуса.

79. Радыус асновы конуса роўны r, а ўтваральная нахілена да плоскасці асновы пад вуглом φ; каля гэтага конуса апісана піраміда, якая мае ў аснове прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом α. Знайдзіце аб'ём піраміды.

80. **У правільную трохвугольную піраміду ўпісаны конус. Старана асновы піраміды роўная a і яе канты ўтвараюць з плоскасцю асновы вугал α. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні і аб'ём конуса.**

81. Аб'ём прамога кругавога конуса роўны V. У конус упісана піраміда, у аснове якой ляжыць раўнабедраны трохвугольнік з вуглом паміж бакавымі старанамі, роўным α. Знайдзіце аб'ём піраміды.

82. Знайдзіце аб'ём конуса, апісанага каля правільнай чатырохвугольнай піраміды, старана асновы якой роўная a, а двухгранны вугал пры аснове роўны $60°$.

83. Асновай піраміды служыць прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом α. Гэты трохвугольнік упісаны ў аснову конуса. Вяршыня піраміды супадае з сярэдзінай адной з утваральных конуса. Знайдзіце адносіну аб'ёму конуса да аб'ёму піраміды.

84. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ грані SAC і ABC перпендыкулярныя і з'яўляюцца роўнымі раўнабедранымі трохвугольнікамі ($AS = AC = AB = a$, $\angle SAC = 30°$). Знайдзіце вышыню прамога кругавога конуса, акружнасць асновы якога праходзіць праз пункты A, B і C, а бакавая паверхня – праз пункт S.

85. Радыус асновы конуса роўны R. Плошча бакавой паверхні конуса ў 3π разоў большая за плошчу восевага сячэння. Знайдзіце аб'ём конуса.

86. У прамым кругавым конусе адносіна плошчы асновы да плошчы бакавой паверхні роўная m, а даўжыня ўтваральнай роўная l. Знайдзіце аб'ём конуса.

87. У шар упісаны конус. Знайдзіце, пры якіх значэннях радыуса шара і вышыні конуса аб'ём апошняга будзе найбольшым, калі сума гэтых значэнняў роўная a.

88. У шар радыуса R упісаны конус, вышыня якога роўная h. Знайдзіце, пры якім значэнні h гэты аб'ём будзе найбольшым.

89. У конус, радыус асновы якога роўны R, а вышыня h упісаны цыліндр радыуса r. Знайдзіце, пры якім значэнні r аб'ём цыліндра будзе найбольшым.

90. З мноства цыліндраў, упісаных у дадзены конус, знайдзіце радыус цыліндра, які мае найбольшую бакавую паверхню.

91. Радыус асновы конуса меншы за яго ўтваральную на 1 дм, а поўная паверхня яго роўная бакавой паверхні роўнастаронняга цыліндра, радыус асновы якога меншы за радыус асновы конуса на 1 дм. Знайдзіце аб'ёмы конуса і цыліндра.

92. Знайдзіце аб'ём конуса, радыус асновы якога на 1 дм меншы яго ўтваральнай, а поўная паверхня яго роўная поўнай паверхні роўнастаронняга конуса, радыус асновы якога на 2 дм меншы за радыус асновы дадзенага конуса.

93. Знайдзіце аб'ём усечанага конуса, апісанага каля шара, радыус якога роўны 6 см. Плошча бакавой паверхні ўсечанага конуса роўная 400π см^2.

94. У шар радыуса R упісаны ўсечаны конус, утваральная якога роўная R, а вышыня h. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні ўсечанага конуса.

95. Радыусы асноў усечанага конуса роўныя 6 см і 18 см, а плошча бакавой паверхні – 480π см^2. Праз пункт перасячэння дыяганалей восевага сячэння дадзенага ўсечанага конуса праведзена плоскасць, паралельная асновам. Знайдзіце аб'ёмы частак, на якія плоскасць дзеліць усечаны конус.

96. Радыусы асноў усечанага конуса роўныя 3 см і 21 см, а яго ўтваральная 30 см. Плоскасць, паралельная асновам, дзеліць бакавую паверхню конуса на роўнавялікія часткі. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў атрыманых усечаных конусаў.

97. Каля шара апісаны роўнастаронні цыліндр і роўнастаронні конус. Дакажыце, што аб'ём цыліндра есць сярэдняя прапарцыянальная велічыня паміж аб'ёмамі шара і конуса.

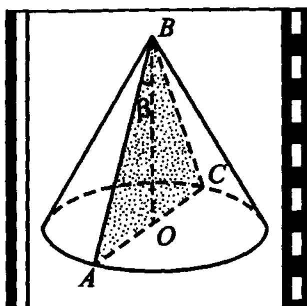
98. Роўнастаронні цыліндр і роўнастаронні конус упісаны ў шар. Дакажыце, што аб'ём цыліндра есць сярэдняя прапарцыянальная велічыня паміж аб'ёмамі шара і конуса.

99. З мноства ўсечаных конусаў, радыусы асноў якіх адносяцца як 1 : 4, а перыметр восевага сячэння роўны 60 см, знайдзіце аб'ём такога ўсечанага конуса, які мае найбольшую бакавую паверхню.

100. Плошча бакавой паверхні ўсечанага конуса роўная суме плошчаў яго асноў, а адносіна радыусаў асноў роўная 1 : 3. Знайдзіце вугал нахілу ўтваральнай да плоскасці асновы конуса.

5.3. Адказы і ўказанні

1. $\dfrac{\pi p^2 \sin\beta}{1+\sin\beta}$.



Рыс. 211

Указанне:

1) $\angle ABC = 2\beta$, $P_{ABC} = 2p$, O – цэнтр асновы конуса, $BC = x$ (рыс. 211);

2) ΔBOC, $OC = BC\sin\beta = x\sin\beta$, $AC = 2OC = 2x\sin\beta$;

3) $P_{ABC} = AB + BC + AC = 2x(1+\sin\beta)$,

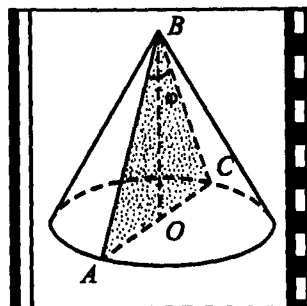
$2p = 2x(1+\sin\beta) \Rightarrow x = \dfrac{p}{1+\sin\beta}$,

$AC = \dfrac{2p\sin\beta}{1+\sin\beta}$;

4) $S_{пав} = \pi OC^2 + \pi OC \cdot CB = \dfrac{\pi p^2 \sin\beta}{1+\sin\beta}$.

2. $\frac{1}{3}\pi S\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

3. $\dfrac{\pi a^3 \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{24\cos^6\frac{\varphi}{2}}$.



Рыс. 212

Указанне:

1) $\angle ABC = \varphi$, O – цэнтр асновы, $OB + BC = a$, $OB = H$, $BC = L$, $OC = R$ (рыс. 212);

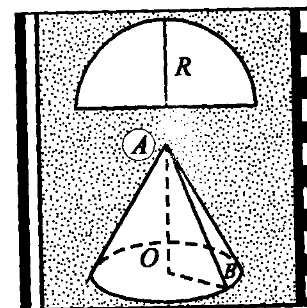
2) ΔBOC, $L = \dfrac{H}{\cos\frac{\varphi}{2}}$, $L + H = a$,

$$H + \frac{H}{\cos\frac{\varphi}{2}} = a \Rightarrow H = \frac{a\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{4}},\ R = H\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{4}};$$

3) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \dfrac{\pi a^3 \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{24\cos^6\frac{\varphi}{4}}$.

4. $\dfrac{S\sqrt{S}\sin\alpha}{6\sqrt{\pi\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

5. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$.



Рыс. 213

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, $AB = R$, C – даўжыня акружнасці (рыс. 213);

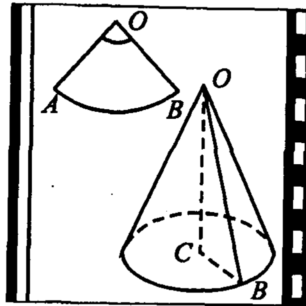
2) $C = 2\pi R$, $\dfrac{C}{2} = \pi R$, $\pi R = 2\pi OB$, такім чынам, $OB = \dfrac{R}{2}$;

3) ΔAOB, $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$;

4) $V = \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot OA = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$.

6. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$.

7. $\dfrac{12\pi l^3}{125}$.



Рыс. 214

Указанне:

1) $\angle AOB = \frac{6\pi}{5}$, $OB = l$, C – цэнтр асновы, $CB = R$ (рыс. 214);

2) $AB = \frac{6\pi l}{5}$, $AB = 2\pi R$, $\frac{6\pi l}{5} = 2\pi R \Rightarrow$

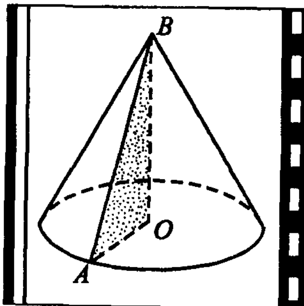
$R = \frac{3l}{5}$;

3) ΔOCB, $OC = \sqrt{OB^2 - CB^2} = \frac{4l}{5}$;

4) $V = \frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot OC = \frac{12\pi l^3}{125}$.

8. 12.

9. 2 : 1.



Рыс. 215

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, $\angle BAO = 60°$;

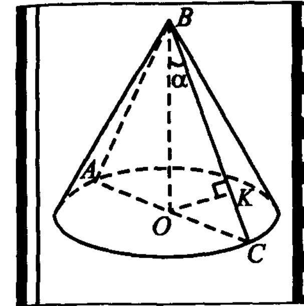
2) ΔBOA, $AB = 2OA$, $S_{асн} = \pi OA^2$,

$S_{бак} = \pi OA \cdot AB = 2\pi OA^2$;

3) $S_{бак} : S_{асн} = 2 : 1$ (рыс. 215).

10. 1 : 5.

11. $\frac{\pi a^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$.



Рыс. 216

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, $OK \perp BC$, $OK = a$, $\angle OBK = \alpha$ (рыс. 216);

2) ΔOKB, $BK = OK \operatorname{ctg}\alpha = a\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $OK^2 = BK \cdot KC \Rightarrow$

$KC = \frac{OK^2}{BK} = a\operatorname{tg}\alpha$;

4) ΔOKB, $OB = \frac{OK}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$;

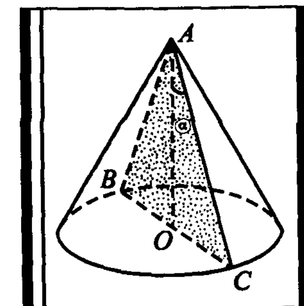
5) $BC = BK + KC = a\operatorname{ctg}\alpha + a\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\sin\alpha\cos\alpha}$;

6) $OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \frac{a}{\cos\alpha}$;

7) $S_{пав} = \pi OC(OC + BC) = \frac{\pi a^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

12. $\frac{\pi a^3 \cos\alpha \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{6\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

13. $\arcsin\left(\frac{P-S}{S}\right)$.



Рыс. 217

Указанне:

1) $OC = x$, $AC = y$, $\pi xy = S$, $\pi x(x+y) = P$, $\angle OAC = \alpha$;

2) $\pi xy : (\pi x(x+y)) = S : P \Rightarrow$

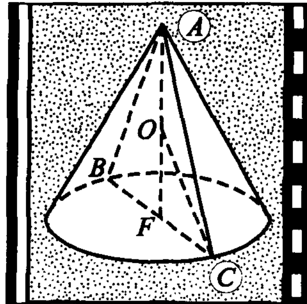
3) $y = \frac{Sx}{P-S}$ (рыс. 217);

4) $\sin\alpha = \frac{x}{y} = \frac{x}{\frac{Sx}{P-S}} = \frac{P-S}{S}$,

$\alpha = \arcsin\left(\frac{P-S}{S}\right)$.

14. $\dfrac{P\sqrt{P\sin\beta}\cos\beta}{3\sqrt{\pi}}$.

15. $\dfrac{9}{16}$.



Рыс. 218

Указанне:

1) O – цэнтр шара і правільнага трохвугольніка ABC, $AB = BC = AC = x$ (рыс. 218);

2) ΔAFC, $AF = \sqrt{AC^2 - FC^2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$,

$AO = \dfrac{2AF}{3} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$;

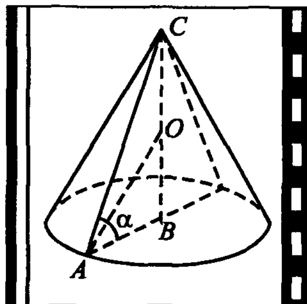
3) $S_ш = 4\pi OA^2 = \dfrac{4\pi x^2}{3}$;

4) $S_{пав} = \pi \cdot FC \cdot (FC + AC) = \dfrac{3\pi x^2}{4}$;

5) $S_{пав} : S_ш = \dfrac{3\pi x^2}{4} : \dfrac{4\pi x^2}{3} = \dfrac{9}{16}$.

16. $\dfrac{125V}{32}$.

17. $\dfrac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha$.



Рыс. 219

Указанне:

1) O – цэнтр шара, R – яго радыус, B – цэнтр асновы конуса, $\angle CAB = \alpha$ (рыс. 219);

2) ΔOAB, $\angle BAO = 2\alpha - \dfrac{\pi}{2}$,

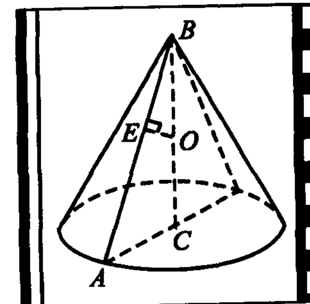
$OB = OA\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = -R\cos 2\alpha$,

$AB = OA\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = R\sin 2\alpha$;

3) $V_к = \dfrac{1}{3}\pi AB^2 \cdot CB = \dfrac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha$.

18. $\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha(1 - \cos 2\alpha)$.

19. $\dfrac{a^6}{2(a^2 - 1)^2}$.



Рыс. 220

Указанне:

1) O – цэнтр шара, C – цэнтр асновы конуса, $BA = L$, $CA = R$, $BC = H$, $OE \perp AB$, $L = aR$ (рыс. 220);

2) ΔBCA,

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = R\sqrt{a^2 - 1}$;

3) $\Delta BCA \sim \Delta BEO$, $BE : BC = BO : BA$,

$\dfrac{aR}{2} : (R\sqrt{a^2 - 1}) = BO : (aR) \Rightarrow$

$BO = \dfrac{a^2 R}{2\sqrt{a^2 - 1}}$;

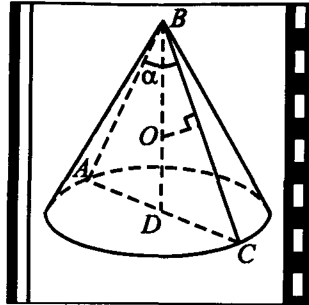
4) $V_ш = \dfrac{4}{3}\pi OB^3 = \dfrac{\pi a^6 R^3}{6\sqrt{(a^2 - 1)^3}}$;

5) $V_к = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H = \dfrac{1}{3}\pi R^3 \sqrt{a^2 - 1}$;

6) $V_ш : V_к = \dfrac{a^6}{2(a^2 - 1)^2}$.

20. $\dfrac{1}{2}V \sin^2 \alpha \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

21. $\frac{7}{25}$.



Рыс. 221

Указание:

1) O – цэнтр шара, D – цэнтр асновы конуса, $S_{асн} = S_{ш}$, $\angle ABC = \alpha$, $OD = r$, $DC = R$ (рыс. 221);

2) $S_{асн} = \pi R^2$, $S_{ш} = 4\pi r^2$, $\pi R^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow R = 2r$;

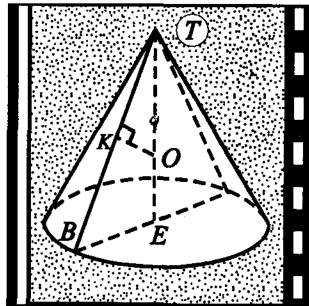
3) ΔODC, $\angle OCD = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}$,

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{9}$,

$5\cos\frac{\alpha}{2} = 4$, $25\cos^2\frac{\alpha}{2} = 16 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{25}$.

22. $\frac{4}{9}, \frac{4}{9}$.

23. $\frac{\pi a^2}{3}$.



Рыс. 222

Указание:

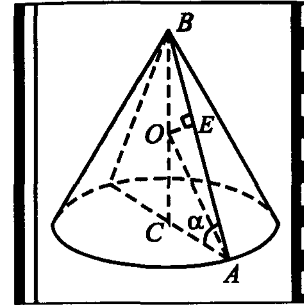
1) $TE = 4OE$, $TB = a$, $OK \perp TB$, K – пункт дотыку (рыс. 222);

2) $\Delta ETB \sim \Delta KTO$, $TB : TO = BE : OK$, $a : 3OE = BE : OE$, $BE = \frac{a}{3}$;

3) $S_{бак} = \pi BE \cdot TB = \frac{\pi a^2}{3}$.

24. $\frac{m^2(m-2)}{(m-1)^4}$.

25. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Рыс. 223

Указание:

1) $V_к = m \cdot V_ш$, C – цэнтр асновы конуса, $CA = R$, $\angle BAC = \alpha$, O – цэнтр шара, $OE \perp AB$, $OC = r$ (рыс. 223);

2) ΔOCA, $r = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$;

3) ΔBCA, $BC = R\operatorname{tg}\alpha$,

$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha$;

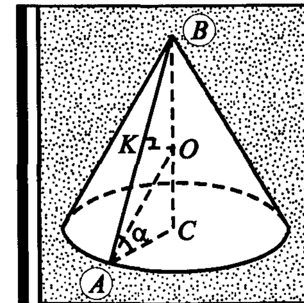
4) $\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}\pi R^3 m \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$, $2m\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 2m\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1 = 0$, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = y$,

$2my^2 - 2my + 1 = 0$, $D = 4m^2 - 8m$, $D \geq 0 \Rightarrow m = 2$,

$4y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

26. $\arccos\left(\frac{2n - 1 \pm 2\sqrt{n^2 - 2n}}{4n + 1}\right)$.

27. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 2g}}}{\sqrt{2}}$, $O < g \leq \frac{1}{2}$.



Рыс. 224

Указание:

1) $V_ш : V_к = g$, C – цэнтр асновы конуса, O – цэнтр шара, $\angle BAC = \alpha$, $OK \perp AB$, $OK = OC = R$ – радыус шара;

2) ΔBKO, $OB = \frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$ (рыс. 224);

3) ΔBCA,

$BC = OB + OC = \frac{R(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha}$,

$$AC = BC \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha};$$

4) $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_к = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot BC = \frac{\pi R^3(1+\cos\alpha)^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$,

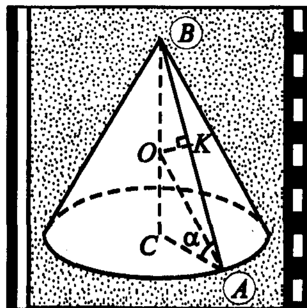
$$g = \frac{V_ш}{V_к} = 2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2},\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = y,\ 2y^2 - 2y + g = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-2g}}{2},\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-2g}) \Rightarrow$$

$$\alpha = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-2g}}{2}},\ O < g \le \frac{1}{2}.$$

28. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

29. $\frac{4\pi l^3\cos^3\alpha}{3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}}$.



Рыс. 225

Указанне:

1) C – цэнтр асновы конуса, O – цэнтр шара, $AB = l$, $\angle BAC = \alpha$, $OK \perp AB$, $OC = OK = r$ – радыус упісанага шара (рыс. 225);

2) ΔBKO, $OB = \frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}$;

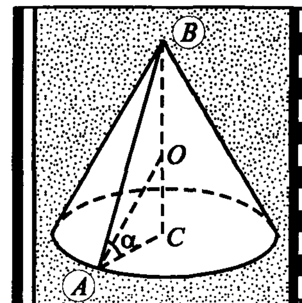
3) ΔOCA, $CA = OC\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

4) $\Delta BKO \sim \Delta BCA$, $OB : AB = OK : CA$, $r = \frac{l\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$;

5) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi l^3\cos^3\alpha}{3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}}$.

30. $4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{9\pi V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

31. $\arccos\frac{1}{3}$.



Рыс. 226

Указанне:

1) $S_{пав.к.} = 2 \cdot S_ш$, O – цэнтр упісанага шара, C – цэнтр асновы конуса, $AC = R$, $OC = r$ – радыус упісанага шара, $\angle BAC = \alpha$;

2) ΔOCA, $OC = AC\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

3) ΔBCA, $AB = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$ (рыс. 226);

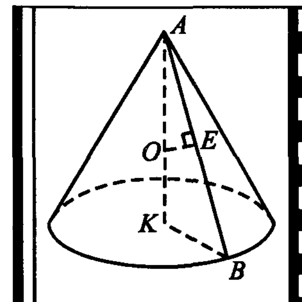
4) $S_{пав.к.} = \pi AC^2 + \pi AC \cdot AB =$

$= \frac{\pi R^2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$, $S_ш = 4\pi r^2 = 4\pi R^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

5) $\frac{\pi R^2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} = 8\pi R^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

32. $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{4\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}$.

33. $\frac{b^4}{2(b^2-1)}$.



Рыс. 227

Указанне:

1) O – цэнтр шара, K – цэнтр асновы конуса, $OK = r$, $KB = R$, $\frac{R}{r} = b$, $AK = H$, $OE \perp AB$ (рыс. 227);

2) $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi r^2 b^2 H$, $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$V_к : V_ш = \frac{b^2 H}{4r}$;

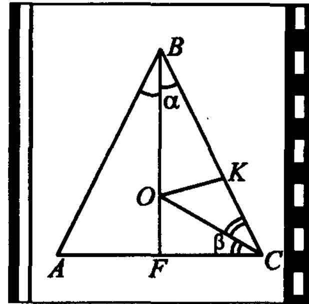
3) $\Delta AEO \backsim \Delta AKB$, $AO : AB = OE : KB$, $(H - r) : \sqrt{H^2 + R^2} =$

$= r : R \Rightarrow H^2(b^2 - 1) - 2Hb^2r = 0 \Rightarrow H = \dfrac{2b^2r}{b^2 - 1}$;

4) $V_к : V_ш = \dfrac{b^4}{2(b^2 - 1)}$.

34. $\dfrac{\pi R^3(k+1)^2}{3(k-1)}$.

35. $\dfrac{\pi}{3}$.



Рыс. 228

Указанне:

1) ABC – восевае сячэнне, O – цэнтр шара, $FC = R$ – радыус асновы конуса, $OK = OF = r$ – радыус упісанага шара (рыс. 228);

2) $S_ш = 4\pi r^2$, $S_{асн} = \pi R^2$, $(4\pi r^2) : (\pi R^2) =$

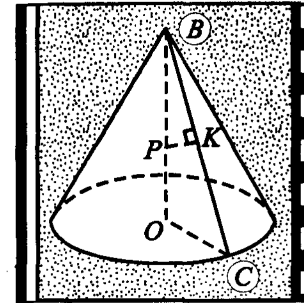
$= S_ш : S_{асн} = 4 : 3 \Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) ΔOFC, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{r}{R} \Rightarrow \beta = \dfrac{\pi}{6}$;

4) ΔBFC, $\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle ABC = \dfrac{\pi}{3}$.

36. $S = \dfrac{\pi H^2 \operatorname{tg}\alpha(1 + \sin\alpha)}{\cos\alpha}$, $V = \dfrac{4\pi H^3 \sin^3\alpha}{3(1 + \sin\alpha)^3}$.

37. 3.



Рыс. 229

Указанне:

1) P – цэнтр шара, O і K – пункты дотыку, $OB = 8$, $BC = 10$, $OP = PK = x$ – радыус шара (рыс. 229);

2) ΔBOC, $OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = 6$;

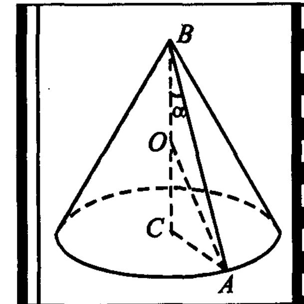
3) $BP = OB - x = 8 - x$;

4) $\Delta BOC \backsim \Delta BKP \Rightarrow OC : BC = PK : BP$

$\Rightarrow 6 : 10 = x : (8 - x)$, $x = 3$.

38. $\dfrac{4}{(1 + \sqrt{2})^3}$.

39. $\dfrac{(1 + \sin\alpha)^3}{4\sin\alpha\cos^2\alpha}$.



Рыс. 230

Указанне:

1) O – цэнтр шара, C – цэнтр асновы конуса, $AC = R$, $\angle CBA = \alpha$ (рыс. 230);

2) ΔBCA, $BC = AC\operatorname{ctg}\alpha = R\operatorname{ctg}\alpha$,

$\angle BAC = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$;

3) ΔOCA, $\angle OAC = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$,

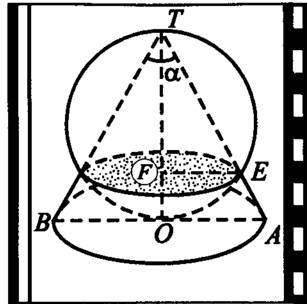
$OC = AC\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{R\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$;

4) $V_к = \dfrac{1}{3}\pi CA^2 \cdot BC = \dfrac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}\alpha$, $V_ш = \dfrac{4}{3}\pi OC^3 = \dfrac{4\pi R^3\cos^3\alpha}{3(1 + \sin\alpha)^3}$;

5) $V_к : V_ш = \dfrac{(1 + \sin\alpha)^3}{4\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

40. $\dfrac{\pi R^3(1 + \sin\alpha)^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

41. $a\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.



Рыс. 231

Указанне:

1) $TA = a$, $\angle BTA = \alpha$ (рыс. 231);

2) ΔTOA, $TO = AT\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}$;

3) ΔOET, $\angle OET = 90°$,

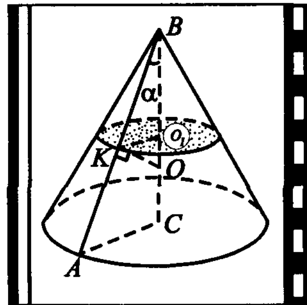
$TE = OT\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

4) ΔTFE,

$EF = TE\sin\frac{\alpha}{2} = a\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

42. $H\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

43. $\frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\cos^5\alpha\sin\alpha}$.



Рыс. 232

Указанне:

1) O – цэнтр шара, C – цэнтр асновы конуса, O_1 – цэнтр акружнасці,

$KO_1 = r$, $\angle CBA = \alpha$, $OK \perp AB$;

2) ΔBO_1K, $BO_1 = O_1K\,\mathrm{ctg}\,\alpha = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

3) ΔO_1KO, $\angle O_1KO = \alpha$, $OO_1 = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

$OK = OC = \frac{r}{\cos\alpha}$ (рыс. 232);

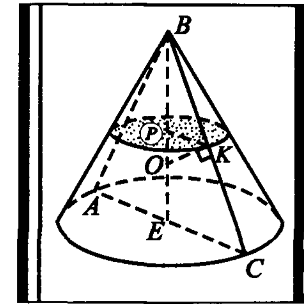
4) $BC = BO_1 + OO_1 + OC = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$;

5) ΔBCA, $AC = BC\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$;

6) $V = \frac{1}{3}\pi AC^2BC = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\cos^5\alpha\sin\alpha}$.

44. $-\frac{\pi r^3\,\mathrm{tg}\,2\alpha}{24\cos^6\alpha}$.

45. $\frac{45\pi R^2}{4}$.



Рыс. 233

Указанне:

1) K, E – пункты дотыку да шара, P – цэнтр акружнасці, па якой бакавая паверхня конуса датыкаецца да шара,

$OE = OK = R$, $OK \perp BC$, $OE \perp AC$,

$PK = \frac{3}{5}R$, $EC = x$ (рыс. 233);

2) ΔKPO,

$PO = \sqrt{OK^2 - PK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{9R^2}{25}} = \frac{4}{5}R$;

3) ΔBKO, $PK^2 = BP\cdot PO$, $BP = \frac{PK^2}{PO} = \frac{9R}{20}$;

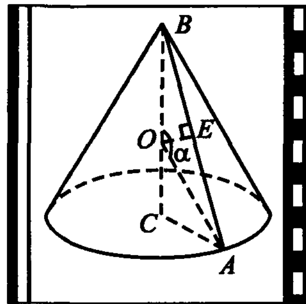
4) $BE = BP + OP + OE = \frac{9}{4}R$;

5) $\Delta BEC \sim \Delta BPK \Rightarrow BE : BP = EC : PK$, $x = \frac{BE\cdot PK}{BP} = 3R$;

6) ΔBEC, $BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \frac{15R}{4}$, $S_{бак} = \pi xBC = \frac{45\pi R^2}{4}$.

46. $\arcsin\frac{n-m}{n+m}$.

47. $-\frac{1}{3}\pi R^3\,\mathrm{tg}^3\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha$.



Рыс. 234

Указанне:

1) O – цэнтр шара, C – цэнтр асновы конуса, $OC = R$, $AC = R_1$, $BC = H$, $\angle BOA = \alpha$, $OE \perp AB$ (рыс. 234);

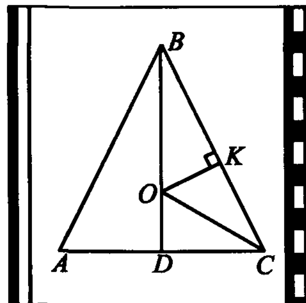
2) ΔOCA, $\angle COA = \pi - \alpha$, $CA = R\,\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -R\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

3) $\Delta BCA \backsim \Delta BEO$, $CA : OE = AB : OB$, $R_1 : R = \sqrt{R_1^2 + H^2} : (H - R)$, $H = \dfrac{2R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\,\alpha - 1}$;

4) $V = \dfrac{1}{3}\pi CA^2 \cdot BC = -\dfrac{1}{3}\pi R^3\,\mathrm{tg}^3\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha$.

48. $\dfrac{\sqrt{S_1(S_2^2 - S_1^2)}}{\pi(S_1 + S_2)}$.

49. $\dfrac{2\pi R^2\,\mathrm{ctg}^2\,\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.



Рыс. 235

Указанне:

1) O – цэнтр шара, D – цэнтр асновы конуса, $OD = R$, $\angle BCD = \alpha$ (рыс. 235);

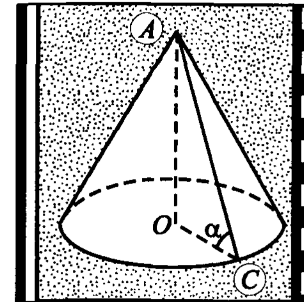
2) ΔODC, $DC = R\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$;

3) ΔBDC, $BC = \dfrac{DC}{\cos\alpha} = \dfrac{R\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$;

4) $S_{пав} = \pi DC^2 + \pi DC \cdot BC = \dfrac{2\pi R^2\,\mathrm{ctg}^2\,\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

50. $3\pi R^3$.

51. $\dfrac{\pi n^2\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.



Рыс. 236

Указанне:

1) O – цэнтр асновы, AO – вышыня конуса, $OC = R$, $AC = x$, $R + x = n$, $\angle OCA = \alpha$ (рыс. 236);

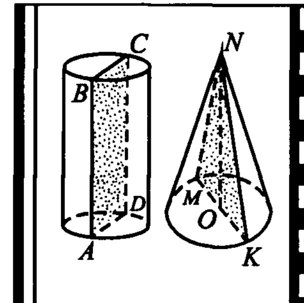
2) ΔAOC, $OC = AC\cos\alpha$, $R = x\cos\alpha$;

3) $x\cos\alpha + x = n$, $x = \dfrac{n}{1 + \cos\alpha}$;

4) $S_{пав} = \pi R(R + x) = \dfrac{\pi n^2\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

52. $\dfrac{S\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{S\cos\alpha}}{3\sqrt{2\pi}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

53. $\dfrac{3\sqrt[4]{3}}{4}$.



Рыс. 237

Указанне:

1) $ABCD$ – квадрат, $AB = a$, ΔMNK – роўнастаронні, $NK = b$, $S_{ABCD} = S_{MNK}$, O – цэнтр асновы цыліндра;

2) $S_{ABCD} = a^2$, $S_{MNK} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $a^2 = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \dfrac{b\sqrt[4]{3}}{2}$ (рыс. 237);

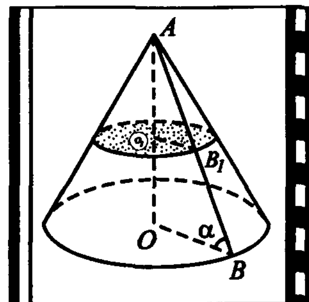
3) ΔNOK, $NO = \sqrt{NK^2 - OK^2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$;

4) $V_ц = \pi DC \cdot \left(\dfrac{AD}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi b^3\sqrt[4]{27}}{32}$, $V_к = \dfrac{1}{3}\pi OK^2 \cdot ON = \dfrac{\pi b^3\sqrt{3}}{24}$;

5) $V_ц : V_к = \dfrac{3\sqrt[4]{3}}{4}$.

54. $\dfrac{9}{4}$.

55. $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.



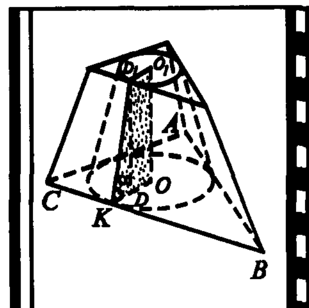
Рыс. 238

Указанне:

1) O – цэнтр асновы конуса, O_1 – цэнтр сячэння, V_1 – аб'ём адсечанага конуса, $2V_1 = V$, $\angle ABO = \alpha$, $O_1B = R$, $O_1B_1 \parallel OB$, $O_1B_1 = r$, $k = \sqrt[3]{2}$ – каэфіцыент падобнасці (рыс. 238);
2) $\Delta AO_1B_1 \backsim \Delta AOB$, $AO = kAO_1 = \sqrt[3]{2}R$;
3) ΔO_1OB, $\angle OO_1B = \pi - 2\alpha$, $OB = R\sin(\pi - 2\alpha) = R\sin 2\alpha$;
4) ΔAOB, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AO}{OB} = \frac{\sqrt[3]{2}R}{R\sin 2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

56. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}r$.

57. $\frac{\pi r^2}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}$.



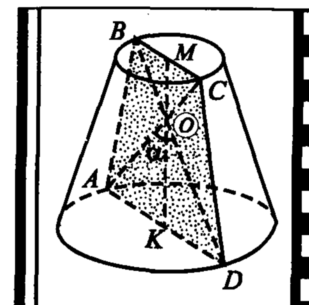
Рыс. 239

Указанне:

1) O, O_1 – цэнтры асноў конуса, ABC – ніжняя аснова піраміды, $BK = KC$, $O_1D_1 \parallel OK$, $O_1D_1 = r$, $\angle D_1KO = \alpha$, $DD_1 \parallel OO_1$, $OK = R$, $D_1K = r + R$ (рыс. 239);
2) ΔD_1DK, $DK = D_1K\cos\alpha = (r+R)\cos\alpha$, $DK = R - r$, $R - r = r\cos\alpha + R\cos\alpha$ $\Rightarrow R = \frac{r(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}$;
3) $S_{бак} = \pi(R+r)^2 = \frac{\pi r^2}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}$.

58. $\frac{\pi\sqrt{14}}{12}$.

59. $\frac{7}{54}\pi l^3 \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$.



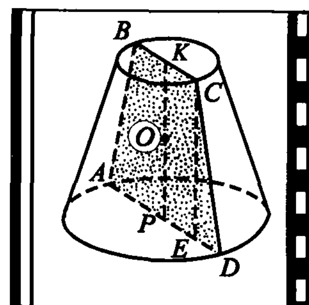
Рыс. 240

Указанне:

1) $ABCD$ – восевае сячэнне конуса, O – пункт перасячэння дыяганалей сячэння, $DO : OB = 2:1$, $\angle AOD = \alpha$, $BD = l$, $OM \perp BC$, $OK \perp AD$ (рыс. 240);
2) ΔOKD, $OK = OD\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l\cos\frac{\alpha}{2}$, $KD = OD\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$;
3) ΔOMB, $OM = OB\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}l\cos\frac{\alpha}{2}$, $BM = OB\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$;
4) $MK = OK + OM = l\cos\frac{\alpha}{2}$;
5) $V = \frac{1}{3}\pi MK\cdot(KD^2 + KD\cdot MC + MC^2) = \frac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$.

60. $\frac{1}{12}\pi\sin\alpha(1 + 2\sin^2\alpha)$.

61. $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.



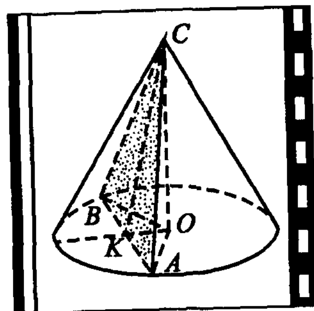
Рыс. 241

Указанне:

1) O – цэнтр шара, $ABCD$ – восевае сячэнне конуса, $OP \perp AD$, $OK \perp BC$, $CE \parallel KP$, $CD = 10$, $\angle CDE = 45°$;
2) ΔCED, $CE = CD\sin 45° = 5\sqrt{2}$;
3) $OP = \frac{PK}{2} = \frac{CE}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (рыс. 241);
4) $V_ш = \frac{4}{3}\pi OP^3 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.

62. $\dfrac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.

63. $\pi h^2\sqrt{6}$.



Рыс. 242

Указанне:

1) O – цэнтр асновы конуса, $OA = OB = R$, $AC \perp CB$, $OC = h$, $CK \perp AB$ (рыс. 242);

2) ΔAOB, $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$;

3) ΔOKB, $\angle KOB = 60^\circ$, $\angle KBO = 30^\circ$ $\Rightarrow OK = \dfrac{R}{2}$, $KB = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$;

4) ΔCKB, $\angle CBK = 45^\circ$, $CK = KB$, $CB = \sqrt{2KB^2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$;

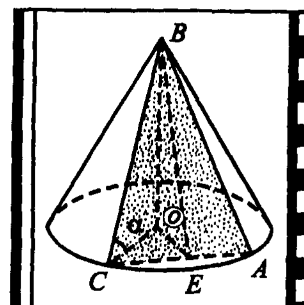
5) ΔCOB, $CB = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{h^2 + R^2}$;

6) $\dfrac{R\sqrt{6}}{2} = \sqrt{h^2 + R^2} \Rightarrow R = h\sqrt{2} \Rightarrow CB = h\sqrt{3}$;

7) $S_{бак} = \pi OB \cdot CB = \pi h^2\sqrt{6}$.

64. $\dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{3} - 1)$.

65. $\dfrac{R^2 \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha\cos^2\varphi}$.



Рыс. 243

Указанне:

1) O – цэнтр асновы конуса, $OC = OA = R$, $\angle BCO = \alpha$, $BE \perp AC$, $\angle EBO = \varphi$ (рыс. 243);

2) ΔBOC, $BO = OC \operatorname{tg}\alpha = R \operatorname{tg}\alpha$, $BC = \dfrac{OC}{\cos\alpha} = \dfrac{R}{\cos\alpha}$;

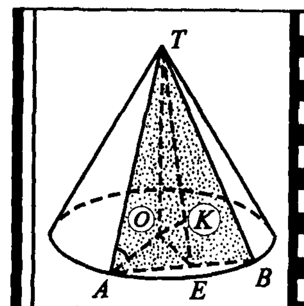
3) ΔBOE, $BE = \dfrac{BO}{\cos\varphi} = \dfrac{R\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}$;

4) ΔBEC, $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \dfrac{R\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha\cos\varphi}$;

5) $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BE}{2} = \dfrac{R^2 \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha\cos^2\varphi}$.

66. 24.

67. $\dfrac{\pi d^3(4\cos^2\varphi - 1)}{3\cos^3\varphi}$.



Рыс. 244

Указанне:

1) $BE = EA$, $OK \perp TE$, $OK = d$, $\angle OET = \varphi$, $TA = 2d$ (рыс. 244);

2) ΔOKE, $OE = \dfrac{OK}{\sin\varphi} = \dfrac{d}{\sin\varphi}$;

3) ΔTOE, $OT = OE\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{d}{\cos\varphi}$;

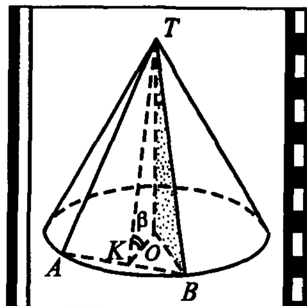
4) ΔTOA, $OA = \sqrt{TA^2 - TO^2} = \dfrac{d\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos\varphi}$;

5) $V = \dfrac{1}{3}\pi OA^2 \cdot TO = \dfrac{\pi d^3(4\cos^2\varphi - 1)}{3\cos^3\varphi}$.

8. Зак. 3319.

68. $\dfrac{l\cos\alpha\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}}{\cos\beta(1+\sin\alpha)}$.

69. $\dfrac{h^2\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}}{\sin\beta}$.



Рыс. 245

Указанне:

1) $TO=h$, $\angle OTB=\alpha$, $AK=KB$, $\angle OKT=\beta$ (рыс. 245);

2) $S_{TAB}=\frac{1}{2}AB\cdot TK$;

3) ΔTOB, $OB=h\operatorname{tg}\alpha$;

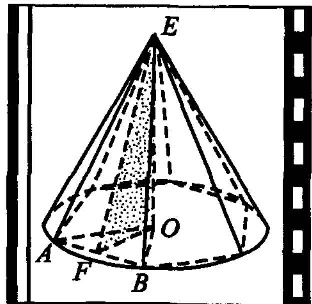
4) ΔTOK, $KO=h\operatorname{ctg}\beta$, $KT=\dfrac{h}{\sin\beta}$;

5) ΔOKB,
$KB=\sqrt{OB^2-KO^2}=h\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}$;

6) $S_{ATB}=\dfrac{h^2\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}}{\sin\beta}$.

70. $\dfrac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

71. 4π, $2\pi\sqrt{13}$.



Рыс. 246

Указанне:

1) $AB=2$, $AF=FB$, O – цэнтр асновы конуса, $\angle EFO=\dfrac{\pi}{3}$;

2) ΔAOB, $OB=OA=2$, $\angle OBF=60°$, $OF=OB\sin60°=\sqrt{3}$;

3) ΔEOF, $OE=OF\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=3$,

$EF=\dfrac{OF}{\cos\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$;

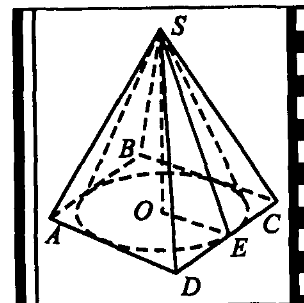
4) $V=\dfrac{1}{3}\pi OB^2\cdot OE=4\pi$ (рыс. 246);

5) ΔEFB, $BE=\sqrt{EF^2+FB^2}=\sqrt{13}$;

6) $S_{бак}=\pi OB\cdot BE=2\pi\sqrt{13}$.

72. $\dfrac{\pi R^2H}{12}$.

73. $\dfrac{1}{4}\pi a(a+2m)$.



Рыс. 247

Указанне:

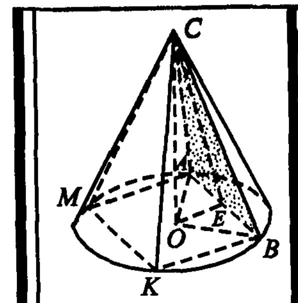
1) $AB=BC=a$, O – цэнтр асновы конуса, $DE=EC$, $SE=m$;

2) $OE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2}$ (рыс. 247);

3) $S_{пав}=\pi OE^2+\pi OE\cdot SE=\dfrac{1}{4}\pi a(a+2m)$.

74. 14.

75. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.



Рыс. 248

Указанне:

1) $ABKM$ – квадрат, $AB=a$, $\angle ACB=\alpha$, O – цэнтр асновы (рыс. 248);

2) ΔMKB, $MB=\sqrt{MK^2+KB^2}=a\sqrt{2}$,
$OB=\dfrac{1}{2}MB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

3) ΔCEB, $EB=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$,

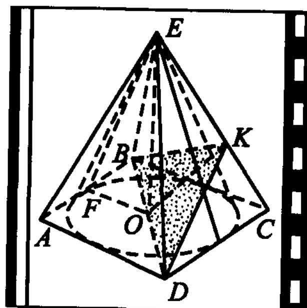
$$CB = \frac{EB}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

4) ΔCOB, $CO = \sqrt{CB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

5) $V = \dfrac{1}{3}\pi OB^2 \cdot OC = \dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

76. $\dfrac{2l^3 \sin 2\alpha \cos\alpha}{3\sin\beta}$.

77. $\dfrac{\sqrt[3]{12Q\sqrt{-2\cos\alpha}}}{\pi\cos\frac{\alpha}{2}}$.



Рыс. 249

Указанне:

1) $V_к = Q$, O – цэнтр асновы конуса, $DK \perp EC$, $OF \perp AB$, $\angle BKD = \alpha$, $AD = x$, $OE = H$ (рыс. 249);

2) ΔDAB, $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = x\sqrt{2}$, $OD = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$;

3) ΔKOD, $DK = \dfrac{OD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

4) $OF = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{x}{2}$, $V_к = \dfrac{1}{3}\pi OF^2 \cdot OE = \dfrac{\pi x^2 H}{12}$, $Q = \dfrac{\pi x^2 H}{12}$, $H = \dfrac{12Q}{\pi x^2}$;

5) ΔEOF, $EF^2 = OE^2 + OF^2 = \dfrac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \dfrac{x^2}{4}$;

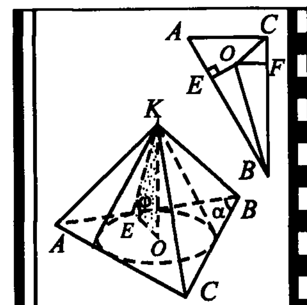
6) ΔEOC, $EC^2 = OE^2 + OC^2 = \dfrac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \dfrac{x^2}{2}$;

7) $EF^2 \cdot AB^2 = EC^2 \cdot DK^2$, $x^2\left(\dfrac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \dfrac{x^2}{4}\right) = \dfrac{x^2}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \dfrac{x^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{12Q\sqrt{-2\cos\alpha}}{\pi\cos\frac{\alpha}{2}}}.$$

78. $\dfrac{\pi h^3(1-\cos\alpha)}{3\cos\alpha}$.

79. $\dfrac{1}{6}r^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi\left(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$.



Рыс. 250

Указанне:

1) O – цэнтр асновы конуса, $OE \perp AB$, $OE = r$, $\angle KEO = \varphi$, $\angle BCA = 90°$, $\angle ABC = \alpha$, $OF \perp BC$ (рыс. 250);

2) ΔKOE, $OK = OE\operatorname{tg}\varphi = r\operatorname{tg}\varphi$;

3) ΔABC, $OF = FC = r$ (таму што $\angle OCF = 45°$), $BF = OF\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$BC = BF + FC = r\left(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

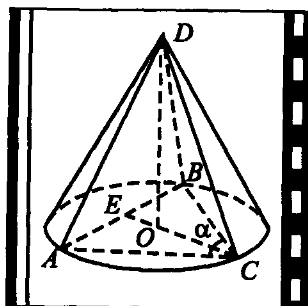
$AC = BC\operatorname{tg}\alpha = r\operatorname{tg}\alpha\left(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC = \dfrac{1}{2}r^2\operatorname{tg}\alpha\left(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$;

4) $V_{піp} = \dfrac{1}{3}S_{асн} \cdot OK = \dfrac{1}{6}r^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi\left(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$.

80. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+1}}{24}$, $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{108}$.

81. $\dfrac{2V\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\pi}$.



Рыс. 251

Указание:

1) $V_к = V$, $AC = CB$, $\angle ACB = \alpha$, O – цэнтр асновы конуса, $AE = EB$, $AC = x$ (рыс. 251);

2) ΔAEC, $AE = AC\sin\dfrac{\alpha}{2} = x\sin\dfrac{\alpha}{2}$,

$AB = 2x\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

3) ΔABC,

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BC\sin\alpha = \dfrac{1}{2}x^2\sin\alpha$,

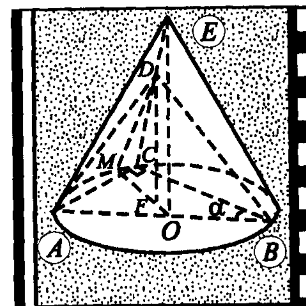
$OC = \dfrac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}} = \dfrac{x}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $V_к = \dfrac{1}{3}\pi OC^2\cdot OD \Rightarrow OD = \dfrac{3V}{\pi OC^2} = \dfrac{12V\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\pi x^2}$;

5) $V_{пір} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot OD = \dfrac{2V\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\pi}$.

82. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{13}}{12}$.

83. $2\pi : \sin 2\alpha$.



Рыс. 252

Указание:

1) O – цэнтр асновы конуса, $\angle ACB = 90°$, $AO = OB$, $\angle CBA = \alpha$, $OA = R$, $OE = H$, $MD = DE$, $DF \perp MO$;

2) ΔEOM, $DF = \dfrac{1}{2}OE = \dfrac{1}{2}H$ (рыс. 252);

3) ΔABC, $BC = AB\cos\alpha = 2R\cos\alpha$, $AC = AB\sin\alpha = 2R\sin\alpha$;

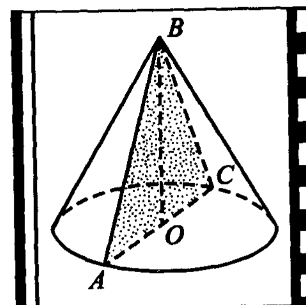
4) $V_к = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$,

$V_{пір} = \dfrac{1}{3}S_{асн}\cdot DF = \dfrac{1}{6}HR^2\sin 2\alpha$;

5) $V_к : V_{пір} = 2\pi : \sin 2\alpha$.

84. $\dfrac{a(2+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}$.

85. $\dfrac{\pi R^3}{6\sqrt{2}}$.



Рыс. 253

Указание:

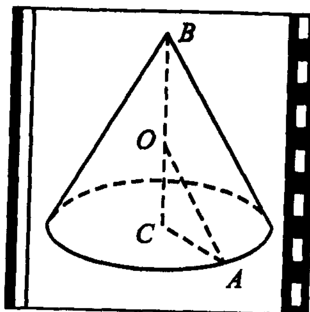
1) O – цэнтр асновы конуса, $OC = R$, $S_{бак} = 3\pi S_{ABC}$, $OB = H$ (рыс. 253);

2) $S_{бак} = \pi R\sqrt{H^2+R^2}$, $S_{ABC} = RH \Rightarrow$ $\pi R\sqrt{H^2+R^2} = RH3\pi \Rightarrow H = \dfrac{R}{\sqrt{8}}$;

3) $V = \dfrac{1}{3}\pi OC^2\cdot OB = \dfrac{\pi R^3}{6\sqrt{2}}$.

86. $\dfrac{1}{3}\pi m^2 l^3\sqrt{1-m^2}$.

87. $\frac{5a}{9}$, $\frac{4a}{9}$.



Рыс. 254

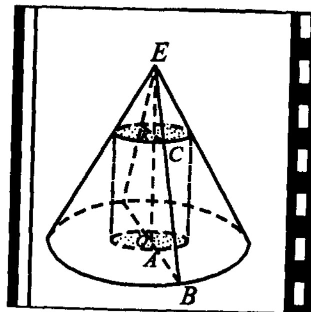
Указанне:

1) C – цэнтр асновы конуса, O – цэнтр шара, $OA = R$, $BC = H$, $R + H = a$ (рыс. 254);
2) ΔOCA, $OC = H - R$, $AC^2 = OA^2 - OC^2 = H(2R - H)$;
3) $2R + 2H = 2a$, $2R - H + 3H = 2a \Rightarrow 2R - H = 2a - 3H \Rightarrow AC^2 = 2aH - 3H^2$;
4) $V_к = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi(2aH^2 - 3H^3)$,

$V_к' = \frac{1}{3}\pi(4aH - 9H^2)$, $V_к' = 0 \Rightarrow H = \frac{4a}{9}$, $R = \frac{5a}{9}$.

88. $\frac{4}{3}R$.

89. $\frac{2}{3}R$.



Рыс. 255

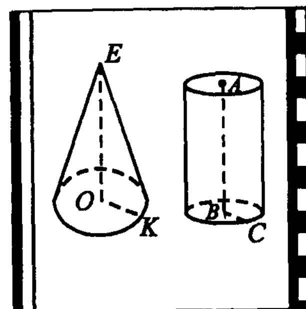
Указанне:

1) O, K – цэнтры асноў цыліндра, $EO = h$, $OB = R$, $OA = r$, $EK = h'$ (рыс. 255);
2) $\Delta EKC \sim \Delta EOB$, $EK : EO = KC : OB$, $h' : h = r : R \Rightarrow h' = \frac{hr}{R}$;
3) $OK = OE - EK = h - h' = \frac{h(R - r)}{R}$;
4) $V_ц = \pi OA^2 \cdot OK = \frac{\pi r^2 h(R - r)}{R}$,

$V_ц' = 2\pi hr - \frac{3\pi hr^2}{R}$, $V_ц' = 0$, $\frac{r(2\pi hR - 3\pi hr)}{R} = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3}R$.

90. $\frac{R}{2}$.

91. 16π дм^3, 54π дм^3.



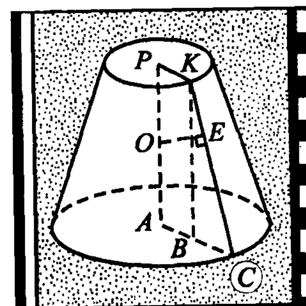
Рыс. 256

Указанне:

1) O – цэнтр асновы конуса, A і B – цэнтры асноў цыліндра, $OK = R$, $OE = H$, $EK = l$, $l = R + 1$, $S_{пав.к.} = S_{бак.ц.}$, $BC = R - 1$ (рыс. 256);
2) $S_{пав.к.} = \pi OK^2 + \pi OK \cdot EK = 2\pi R^2 + \pi R$;
3) $S_{бак.ц.} = 2\pi BC \cdot AB = 4\pi(R - 1)^2$;
4) $\pi R(2R + 1) = 4\pi(R - 1)^2$, $R = 4$ дм, $l = 5$ дм, $H = 3$ дм;
5) $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 16\pi$ дм^3;
6) $V_ц = 2\pi(R - 1)^3 = 54\pi$ дм^3.

92. 240π дм^3.

93. 1456π см^3.



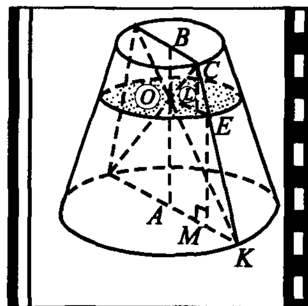
Рыс. 257

Указанне:

1) O – цэнтр шара, A і P – цэнтры асноў конуса, $OE \perp KC$, $KB \perp AC$, $PK = r$, $AC = R$, $OA = OE = OP = 6$ см, $S_{бак} = 400\pi$ см^2 (рыс. 257);
2) $AP = 2 \cdot OA = 12$ см, $PK = KE = r$, $AC = EC = R$, $KC = KE + EC = r + R$;
3) $S_{бак} = \pi(AC + PK) \cdot KC$, $400\pi = \pi(R + r)^2 \Rightarrow R + r = 20$ см, $KC = 20$ см;
4) ΔKBC, $BC = AC - PK = R - r$, $BC = \sqrt{KC^2 - BK^2} \Rightarrow R - r = 16$ см;
5) $\begin{cases} R + r = 20 \\ R - r = 16 \end{cases} \Rightarrow R = 18$ см, $r = 2$ см;
6) $V = \frac{1}{3}\pi AP(AC^2 + PK \cdot AC + PK^2) = 1456\pi$ см^3.

94. $\pi Rh\sqrt{3}$.

95. 228π см^3, 2268π см^3.



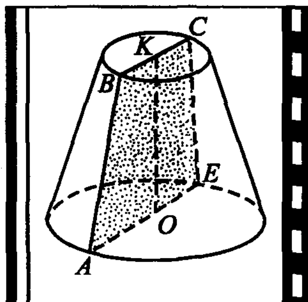
Рыс. 258

Указанне:

1) O – цэнтр асновы сячэння, A і B – цэнтры асноў конуса, $OE = r$, $CL \perp OE$, $EM \perp AK$, $BC = 6$ см, $AK = 18$ см, $S_{бак} = 480\pi$ см^2 (рыс. 258);
2) $S_{бак} = \pi(BC + AK) \cdot CK$, $480\pi = \pi(6 + 18) \cdot CK \Rightarrow CK = 20$ см;
3) $AB = \sqrt{CK^2 - (AK - BC)^2} = 16$ см;
4) $\Delta OBC \sim \Delta OAK$, $OB : OA = BC : AK = 1 : 3$;
5) $\Delta CLE \sim \Delta EMK$, $CL : EM = LE : MK$, $1 : 3 = (r - 6) : (18 - r)$, $r = 9$ см;
6) $V_1 = \frac{1}{3}\pi OB(OE^2 + BC^2 + OE \cdot BC) = 228\pi$ см^3,
$V_2 = \frac{1}{3}\pi OA(OE^2 + AK^2 + OE \cdot AK) = 2268\pi$ см^3.

96. $62 : 109$.

99. 756π см^3.



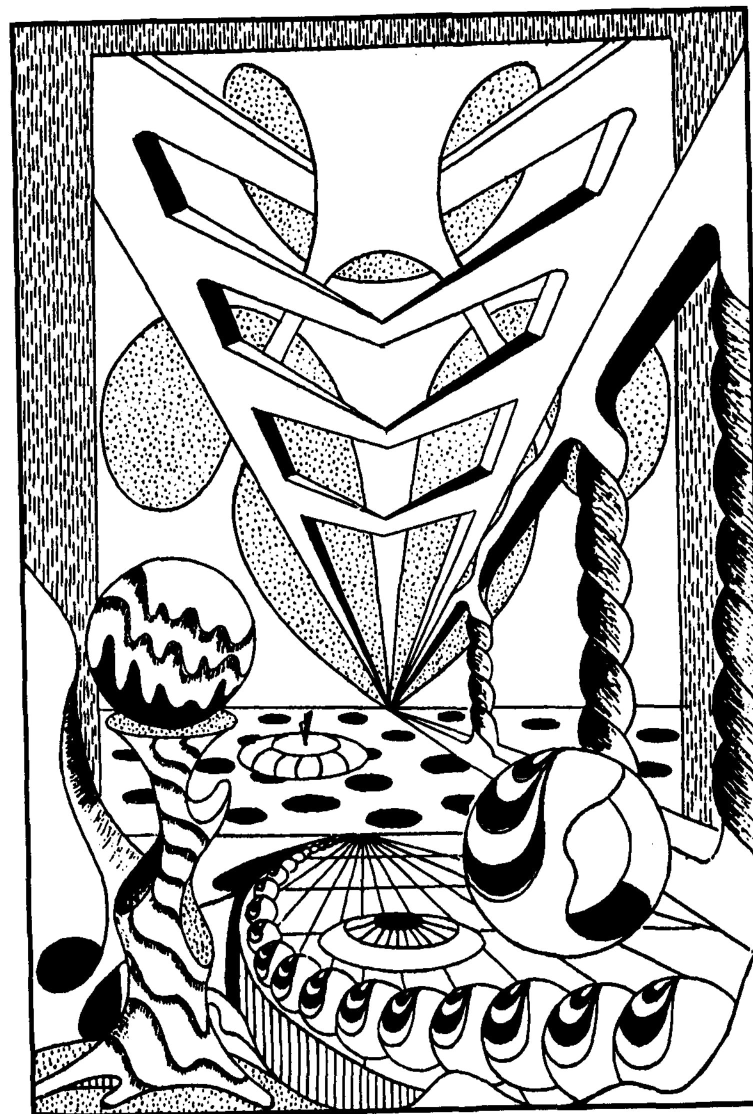
Рыс. 259

Указанне:

1) O і K – цэнтры асноў конуса, $OE = R$, $KC = r$, $r : R = 1 : 4$, $R = 4r$, $P_{ABCE} = 60$ см (рыс. 259);
2) $P_{ABCE} = 2AB + BC + AE$, $60 = 2AB + 10r$, $AB = 30 - 5r$;
3) $S_{бак} = \pi(OE + KC) \cdot AB = 25\pi(6r - r^2)$, $S'_{бак} = 25\pi(6 - 2r)$, $S'_{бак} = 0 \Rightarrow r = 3$ см, $R = 12$ см, $AB = 15$ см;
4) $KO = \sqrt{AB^2 - (AO - BK)^2} = 12$ см;
5) $V = \frac{1}{3}\pi KO \cdot (KC^2 + OE^2 + KC \cdot OE) = 756\pi$ см^3.

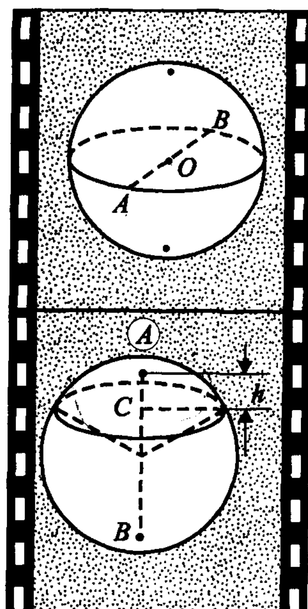
100. $\arccos\frac{4}{5}$.

6
Сфера. Шар



6. СФЕРА. ШАР

6.1 Формулы, задачы



Рыс. 260

1. **Сферай** называецца паверхня, якая складаецца з усіх пунктаў прасторы, што знаходзяцца на дадзенай адлегласці R ад дадзенага пункта O.

Дадзены пункт O называецца **цэнтрам сферы**, а дадзеная адлегласць R – **радыусам сферы**.

Любы адрэзак, які злучае цэнтр і які-небудзь пункт сферы, таксама называецца **радыусам сферы**.

Адрэзак $AB = 2R$, які злучае два пункты сферы і праходзіць праз яе цэнтр, называецца **дыяметрам сферы** (рыс. 260).

Плошча сферы радыуса R вылічваецца па формуле

$$S_{сферы} = 4\pi R^2.$$

2. **Шар.** Шарам называецца цела, якое складаецца з усіх пунктаў прасторы, што знаходзяцца на адлегласці, не большай за дадзеную адлегласць R ад дадзенага пункта O.

Дадзены пункт O называецца **цэнтрам шара**, а дадзеная адлегласць R – **радыусам шара**.

Аб'ём шара радыуса R вылічаецца па формуле

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. **Шаравы сегмент.** Шаравым сегментам называецца частка шара, якая адсякаецца ад яго якой-небудзь плоскасцю. Любая плоскасць рассякае шар на два шаравыя сегменты. Круг, які атрымліваецца ў сячэнні, называецца **асновай** кожнага з гэтых сегментаў, а даўжыні адрэзкаў CA і CB дыяметра AB, перпендыкулярнага сякучай плоскасці, называюцца **вышынямі** сегментаў.

Калі вышыня сегмента роўная h, а радыус шара роўны R, то аб'ём шаравога сегмента вылічваецца па формуле

$$V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h),$$

а плошча

$$S = 2\pi Rh.$$

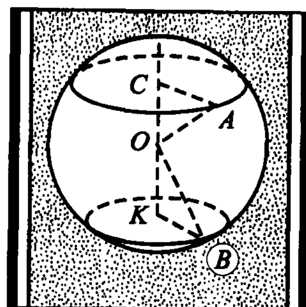
4. **Шаравы слой.** Шаравым слоем называецца частка шара, якая змешчана паміж дзвюма паралельнымі сякучымі плоскасцямі. Кругі, якія атрымаліся ў сячэнні шара гэтымі плоскасцямі, называюцца **асновамі** шаравога слоя, а адлегласць паміж плоскасцямі – **вышыней** шаравога слоя.

5. **Шаравы сектар.** Шаравым сектарам называецца цела, якое складаецца з сумы або рознасці шаравога сегмента і конуса з вяршыняй у цэнтры шара, якія маюць агульную аснову: сума, калі шаравы сегмент меншы за палову шара, рознасць, калі большы.

Калі радыус шара роўны R, а вышыня шаравога сегмента роўная h, то аб'ём V шаравога сектара вылічваецца па формуле

$$V_{ш.сект.} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Задача 1. Сячэнні шара дзвюма паралельнымі плоскасцямі, паміж якімі ляжыць цэнтр шара, маюць плошчы 144π см^2 і 25π см^2. Знайдзіце плошчу паверхні шара, калі адлегласць паміж паралельнымі плоскасцямі роўная 17 см.

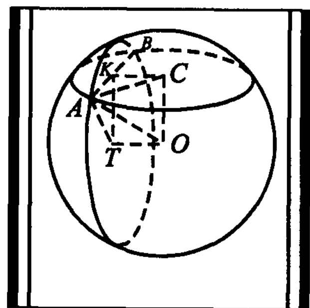


Рыс. 261

Рашэнне. Няхай CA і KB – радыусы сячэнняў шара, пункт O – цэнтр шара. Будзем лічыць, што $CA > KB$ (рыс. 261). Па ўмове задачы $\pi CA^2 = 144\pi$, $\pi KB^2 = 25\pi$, $CK = 17$ см. Абазначым CO праз x. Тады $OK = 17 - x$. Паколькі $OA = OB$ (радыусы шара), то $\sqrt{CA^2 + OC^2} = \sqrt{OK^2 + KB^2}$, або $\sqrt{12^2 + x^2} = \sqrt{(17-x)^2 + 5^2}$.

Адсюль знаходзім $x = 5$ см. Радыус шара $OA = \sqrt{CA^2 + OC^2} = 13$ см. Поўная паверхня шара $S_ш = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 169 = 676\pi$ см².

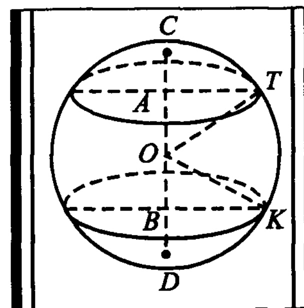
Задача 2. Два ўзаемна перпендыкулярныя сячэнні шара маюць агульную хорду даўжынёй 12 см. Знайдзіце радыус шара, калі плошчы сячэнняў роўныя 100π см^2 і 64π см^2.



Рыс. 262

Рашэнне. З умовы вынікае, што радыусы сячэнняў $CA = 10$ см, $TA = 8$ см. Няхай пункт O – цэнтр шара, а пункт K – сярэдзіна агульнай хорды $AB = 12$ см (рыс. 262). У прамавугольным трохвугольніку AKC ($\angle AKC = 90°$, $AK = 6$ см, $CA = 10$ см) катэт $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ см.
З прамавугольнага трохвугольніка ATO ($\angle ATO = 90°$, $TA = 8$ см, $TO = CK = 8$ см) знаходзім радыус шара $OA = \sqrt{TA^2 + TO^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128}$ см.

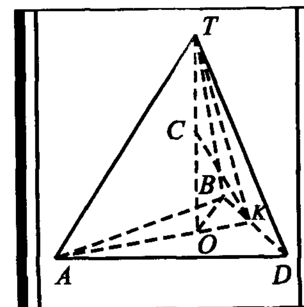
Задача 3. Дыяметр шара падзелены на тры часткі ў адносіне 1 : 3 : 2 і праз пункты дзялення праведзены перпендыкулярныя яму плоскасці. Знайдзіце плошчу паверхні шара, калі сума плошчаў сячэнняў роўная 52π см^2.



Рыс. 263

Рашэнне. Няхай радыус сферы $R = OT = OK$, а радыусы сячэнняў $R_1 = AT$ і $R_2 = BK$ (рыс. 263). У прамавугольным трохвугольніку OAT ($\angle OAT = 90°$, $OA = \frac{2R}{3}$) $R_1^2 = AT^2 = OT^2 - OA^2 = \frac{5R^2}{9}$. У трохвугольніку OBK ($\angle OBK = 90°$, $OB = \frac{R}{3}$) $R_2^2 = BK^2 = OK^2 - OB^2 = \frac{8R^2}{9}$. Па ўмове $52\pi = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 = \frac{13R^2\pi}{9}$. Адсюль знаходзім $R^2 = 36$ см^2. Значыць, плошча паверхні шара $S_ш = 4\pi R^2 = 144\pi$ см^2.

Задача 4. У аснове піраміды раўнабедраны трохвугольнік, бакавая старана якога роўная a, а вугал пра аснове α. Бакавыя грані піраміды нахілены да асновы пад вуглом φ. Знайдзіце плошчу паверхні ўпісанай у піраміду сферы.

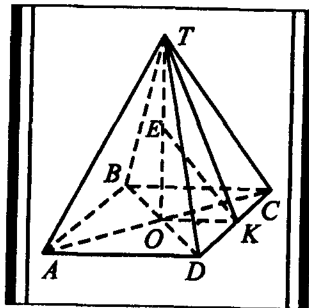


Рыс. 264

Рашэнне. Паколькі бакавыя грані піраміды аднолькава нахілены да плоскасці асновы, то артаганальная праекцыя вяршыні піраміды супадае з цэнтрам O упісанай у трохвугольнік ABD ($AB = AD = a$, $\angle ABD = \alpha$) акружнасці (рыс. 264). Няхай пункт K – сярэдзіна стараны BD, тады цэнтр C упісанай у піраміду сферы ёсць пункт перасячэння вышыні TO і бісектрысы вугла AKT ($\angle AKT = \varphi$).
У прамавугольным трохвугольніку AKB ($\angle AKB = 90°$, $AB = a$, $\angle ABK = \alpha$) катэт $BK = AB\cos\alpha = a\cos\alpha$. З трохвугольніка BKO ($\angle BKO = 90°$, $BK = a\cos\alpha$, $\angle KBO = \frac{\alpha}{2}$) знаходзім $OK = BK\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = a\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. У трохвугольніку COK ($\angle COK = 90°$, $OK = a\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$\angle CKO = \frac{\varphi}{2}$) катэт $CO = OK \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = a\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Паколькі адрэзак CO роўны радыусу R упісанай у піраміду сферы, то плошча паверхні сферы $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2\cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$.

Задача 5. Дыяганаль асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная $4\sqrt{6}$ см, а бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом $60°$. Знайдзіце аб'ём шара, упісанага ў піраміду.

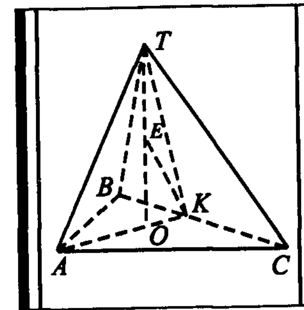


Рыс. 265

Рашэнне. Няхай $TABCD$ – правільная чатырохвугольная піраміда, пункт K – сярэдзіна адрэзка DC. Тады $AC = 4\sqrt{6}$ см, $\angle OKT = 60°$. Цэнтр E упісанага ў піраміду шара есць пункт перасячэння вышыні TO і бісектрысы вугла OKT. З роўнасці $AC^2 = 2DC^2$ знаходзім $DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ см, $OK = \frac{DC}{2} = 2\sqrt{3}$ см. У прамавугольным трохвугольніку EOK катэт $OE = OK \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}} = 2$ (см).

Аб'ём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi OE^3 = \frac{32}{3}\pi$ см^3 (рыс. 265).

Задача 6. У правільную трохвугольную піраміду ўпісаны шар, цэнтр якога дзеліць вышыню піраміды ў адносіне 5 : 4, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце аб'ём шара, калі старана асновы піраміды роўная $12\sqrt{3}$ см.



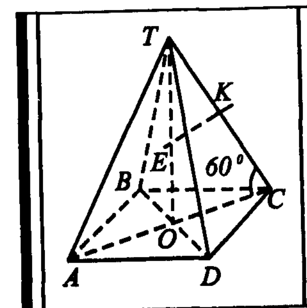
Рыс. 266

Рашэнне. Няхай $TABC$ – правільная трохвугольная піраміда. Аснова вышыні, якая праведзена з вяршыні T, супадае з цэнтрам O трохвугольніка ABC ($AB = 12\sqrt{3}$ см), а цэнтр E упісанага ў піраміду шара есць пункт перасячэння вышыні TO і бісектрысы вугла AKT, дзе пункт K – сярэдзіна канта BC. Па ўмове $TE : EO = 5 : 4$ (рыс. 266).

З прамавугольнага трохвугольніка AKC ($\angle AKC = 90°$, $AC = 12\sqrt{3}$ см, $KC = 6\sqrt{3}$ см) знаходзім катэт $AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{144\cdot 3 - 36\cdot 3} = 18$ (см). $OK = \frac{AK}{3} = 6$ см. Паколькі EK – бісектрыса, то $OK : TK = OE : ET$. Адсюль знаходзім $TK = \frac{15}{2}$ см.

У прамавугольным трохвугольніку TOK ($\angle TOK = 90°$, $OK = 6$ см, $TK = \frac{15}{2}$ см) катэт $TO = \sqrt{TK^2 - OK^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - 36} = \frac{9}{2}$ (см). $OE = \frac{4}{9}TO = 2$ см. Аб'ём шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi OE^3 = \frac{32\pi}{3}$ см^3.

Задача 7. Каля правільнай чатырохвугольнай піраміды апісана сфера. Знайдзіце яе плошчу, калі старана асновы роўная $4\sqrt{2}$ см, а бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вуглом $60°$.



Рыс. 267

Рашэнне. Цэнтр E сферы, апісанай каля правільнай чатырохвугольнай піраміды $TABCD$, супадае з пунктам перасячэння вышыні TO і пасярэдняга перпендыкуляра да бакавога канта (напрыклад, да канта TC). $TK = KC$, $KE \perp TC$ (рыс. 267).

Па ўмове $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle TCO = 60°$.

З прамавугольнага трохвугольніка ADC знаходзім $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} =$

$= \sqrt{32+32} = 8$ (см). $OC = \frac{AC}{2} = 4$ см. Паколькі $\angle OTC = 30°$, то $TC = 2OC = 8$ см. Такім чынам, трохвугольнік ATC роўнастаронні і $TE = \frac{2}{3}TO = \frac{2}{3}\sqrt{TC^2 - OC^2} = \frac{2}{3}\sqrt{64-16} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ (см).

Плошча паверхні сферы $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 4\pi TE^2 = \frac{256}{3}\pi$ см^2.

6.2. Задачы

1. Сячэнні сферы дзвюма паралельнымі плоскасцямі маюць даўжыню 10π і 24π см. Знайдзіце плошчу паверхні сферы, калі адлегласць паміж плоскасцямі роўная 7 см і цэнтры сячэнняў ляжаць на адным радыусе.

2. Радыусы сячэнняў сферы дзвюма ўзаемна перпендыкулярнымі плоскасцямі роўныя R_1 і R_2. Знайдзіце плошчу сферы, калі сячэнні маюць адзін агульны пункт.

3. Плошча вялікага круга шара роўная 50π см^2. Два ўзаемна перпендыкулярныя сячэнні шара маюць агульную хорду даўжынёй 6 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра шара да плоскасцей сячэнняў, калі плошча аднаго з іх 25π см^2.

4. Пункты A, B, C ляжаць на сферы. Адлегласці паміж імі роўныя 5 см, 7 см і 8 см. Плоскасць, якая праходзіць праз гэтыя пункты, знаходзіцца ад цэнтра сферы на адлегласці, роўнай $\frac{7}{3}$ см. Знайдзіце радыус сферы.

5. Шар, радыус якога роўны 41 см, перасечаны плоскасцю на адлегласці 9 см ад цэнтра. Знайдзіце плошчу сячэння.

6. На паверхні сферы дадзены тры пункты. Адлегласці паміж імі 6 см, 8 см, 10 см. Радыус сферы роўны 13 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра сферы да плоскасці, якая праходзіць праз гэтыя тры пункты.

7. У трохвугольной пірамідзе $SABC$ у аснове ляжыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай $AB = c$. Канты піраміды нахілены пад роўнымі вугламі α да плоскасці асновы. Знайдзіце радыус апісанай вакол піраміды сферы.

8. Радыус сферы роўны 63 см. Пункт знаходзіцца на датычнай плоскасці на адлегласці 16 см ад пункта дотыку. Знайдзіце яго найменшую адлегласць да сферы.

9. Дыяганалі ромба 15 см і 20 см. Сфера датыкаецца да ўсіх яго старон. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра сферы да плоскасці ромба, калі радыус сферы роўны 10 см.

10. Шар, радыус якога 7 см, датыкаецца да ўсіх старон ромба. Знайдзіце, на якой адлегласці знаходзіцца цэнтр шара ад плоскасці ромба, калі ад вяршынь ромба ён аддалены на 9 см і 11 см.

11. Сфера датыкаецца да ўсіх старон раўнабедранага трохвугольніка, якія роўныя 15 см, 15 см і 24 см. Адлегласць ад цэнтра шара да вяршыні большага з вуглоў трохвугольніка роўная 13 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра сферы да плоскасці трохвугольніка.

12. У шары праведзены па адзін бок ад цэнтра два паралельныя сячэнні, плошчы якіх роўныя 49π см^2 і 400π см^2, а адлегласць паміж імі роўная 9 см. Знайдзіце плошчу паверхні шара.

13. У шар упісана правільная трохвугольная піраміда, старана асновы якой роўная a. Знайдзіце аб'ём шара, калі вышыня піраміды роўная старане яе асновы.

14. У шар упісаны конус, радыус асновы якога роўны a. Знайдзіце плошчу паверхні шара, калі вышыня конуса роўная радыусу яго асновы.

15. Плоскія вуглы пры вяршыні правільнай трохвугольной піраміды $TABC$ прамыя. Плошча бакавой грані роўная 2 см². Знайдзіце плошчу сферы, упісанай у дадзеную піраміду.

16. Плоскія вуглы пры вяршыні трохвугольной піраміды прамыя. Знайдзіце радыус сферы, упісанай у піраміду, калі плошчы бакавых граняў роўныя 3 см^2, 4 см^2 і 12 см^2.

17. Дыяметр шара падзелены на тры роўныя часткі і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, перпендыкулярныя дыяметру. Знайдзіце аб'ём атрыманага шаравога слоя, калі радыус шара роўны R.

18. Знайдзіце аб'ём шаравога сегмента, калі радыус акружнасці яго асновы роўны 4 см, а радыус шара роўны 5 см.

19. Аб'ём конуса роўны $96\pi\text{ см}^3$, а радыус яго асновы роўны 6 см. Знайдзіце аб'ём шара, упісанага ў дадзены конус.

20. У піраміду, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной a і вуглом α упісаны шар. Знайдзіце аб'ём шара, калі кожная бакавая грань піраміды ўтварае з плоскасцю асновы вугал β.

21. У шар упісан конус, радыус асновы якога роўны r, а вышыня роўная H. Знайдзіце плошчу паверхні шара.

22. Каля шара, радыус якога роўны 5 см, апісана правільная чатырохвугольная піраміда. Адлегласць ад цэнтра шара да бакавога канта піраміды роўная 7 см. Знайдзіце пошчу паверхні сферы, дыяметрам якой з'яўляецца вышыня дадзенай піраміды.

23. Шар апісаны каля цыліндра. Знайдзіце плошчу паверхні шара, калі вышыня цыліндра $2\sqrt{7}$ см, а старана правільнага трохвугольніка, упісанага ў яго аснову, роўная $3\sqrt{3}$ см.

24. У правільную чатырохвугольную піраміду упісаны шар. Знайдзіце плошчу паверхні шара, калі адлегласць ад цэнтра шара да вяршыні піраміды роўная a, а да бакавога канта – b.

25. Каля правільнай трохвугольнай піраміды апісана сфера радыуса 9 см, цэнтр якой супадае з цэнтрам сферы, упісанай у гэту піраміду. Знайдзіце радыус упісанай сферы.

26. У шар упісана піраміда, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік з дыяганаллю $2a$. Кожны бакавы кант піраміды ўтварае з асновай вугал β. Знайдзіце плошчу паверхні шара.

27. У шар упісаны ўсечаны конус, вышыня якога роўная 6 см. Знайдзіце аб'ём шара, калі сферычныя паверхні шаравых сегментаў, адсякаемых ад шара асновамі ўсечанага конуса, роўныя $10\pi\text{ см}^2$ і $30\pi\text{ см}^2$.

28. Радыус сферычнай паверхні шаравога сектара роўны R, а хорда, якая сцягвае дугу восевага сячэння, роўная $2a$. Знайдзіце плошчу паверхні шара, упісанага ў сектар.

29. У шаравы сектар упісаны шар, радыус якога 5 см. Хорда, якая сцягвае дугу восевага сячэння шаравога сектара, роўная 16 см. Знайдзіце сферычную паверхню шаравога сектара.

30. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя і роўныя a. Знайдзіце паверхню сферы, упісанай у гэту піраміду.

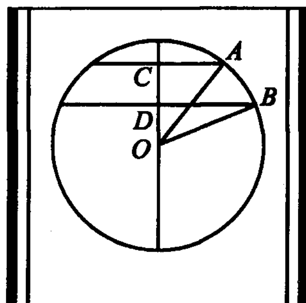
31. У шар упісана трохвугольная прызма, усе канты якой роўныя a. Радыус шара, які праведзены ў вяршыню асновы, утварае з плоскасцю асновы прызмы вугал α. Знайдзіце аб'ём шара.

32. Каля трохвугольнай піраміды, бакавы кант якой роўны a, апісаны шар. Знайдзіце аб'ём шара, калі плоскія вуглы пры вяршыні піраміды прамыя.

33. Асновай піраміды з'яўляецца квадрат са стараной a. Дзве бакавыя грані піраміды перпендыкулярныя плоскасці асновы, а большы бакавы кант утварае з асновай вугал α. Знайдзіце радыус шара, упісанага ў гэту піраміду.

6.3. Адказы і ўказанні

1. 676π см^2.

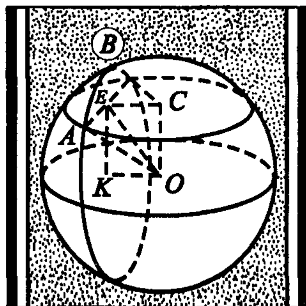


Рыс. 268

Указанне:
1) $OA = OB = R$ – радыус сферы, $AC = R_1$, $DB = R_2$ – радыусы сячэнняў, $DC = 7$ (рыс. 268);
2) $10\pi = 2\pi R_1$, $24\pi = 2\pi R_2 \Rightarrow R_1 = 5$, $R_2 = 12$;
3) $DO = x$, $CO = 7 + x$;
4) $OA^2 = OC^2 + CA^2 = (x+7)^2 + 25$, $OB^2 = DO^2 + DB^2 = x^2 + 144$;
5) $(x+7)^2 + 25 = x^2 + 144 \Rightarrow x = 5$;
6) $R^2 = 169$, $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 676\pi$.

2. $4\pi(R_1{}^2 + R_2{}^2)$.

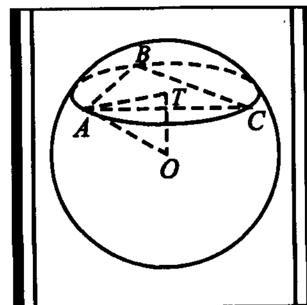
3. 4 см, 5 см.



Рыс. 269

Указанне:
1) O – цэнтр шара, C, K – цэнтры сячэнняў, $AB = 6$, $AE = BE = 3$, $\pi R^2 = \pi OA^2 = 50\pi$, $R^2 = 50$, $\pi BC^2 = 25\pi$, $BC = 5$ (рыс. 269);
2) ΔBEC, $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 4$, $OK = EC = 4$;
3) ΔAEO, $EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{41}$;
4) ΔOCE, $CO = \sqrt{OE^2 - EC^2} = 5$, CO і OK – шукаемыя адлегласці.

4. $\frac{14}{3}$ см.

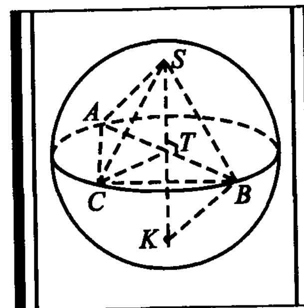


Рыс. 270

Указанне:
1) O – цэнтр сферы, T – цэнтр сячэння, $OT \perp (ABC)$, $OT = \frac{7}{3}$, $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$ (рыс. 270);
2) $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = 10\sqrt{3}$;
3) $AT = R_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$;
4) ΔATO, $AO = R_{сферы} = \sqrt{AT^2 + TO^2} = \frac{14}{3}$.

5. 1600π см^2. **6.** 12 см.

7. $\frac{c}{2\sin 2\alpha}$.

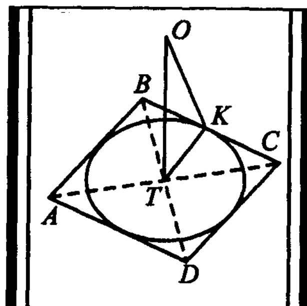


Рыс. 271

Указанне:
1) $\angle SAT = \angle SBT = \angle SCT = \alpha$, $AT = TB$, $ST \perp (ABC)$, SK – дыяметр сферы, $SK = 2R$ (рыс. 271);
2) ΔSTB, $SB = \frac{TB}{\cos\alpha} = \frac{c}{2\cos\alpha}$, $ST = TB\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{c}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$;
3) ΔSBK, $SB^2 = ST \cdot SK$,
$\frac{c^2}{4\cos^2\alpha} = 2R\frac{c}{2}\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow R = \frac{c}{4\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{c}{2\sin 2\alpha}$.

8. 2 см.

9. 8 см.



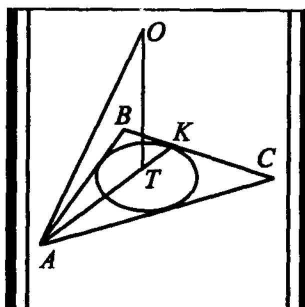
Рыс. 272

Указанне:

1) O – цэнтр сферы, K – пункт дотыку, $OT \perp (ABCD)$, $TK \perp BC$, $BD = 15$, $AC = 20$, $OK = 10$ (рыс. 272);
2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 150$,
$S_{BTC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{75}{2}$;
3) ΔBTC, $BC = \sqrt{BT^2 + TC^2} = \frac{25}{2}$;
4) $S_{BTC} = \frac{1}{2} BC \cdot TK \Rightarrow TK = \frac{2S_{BTC}}{BC} = 6$;
5) ΔOTK, $OT = \sqrt{OK^2 - TK^2} = 8$.

10. 1 см.

11. 12 см.



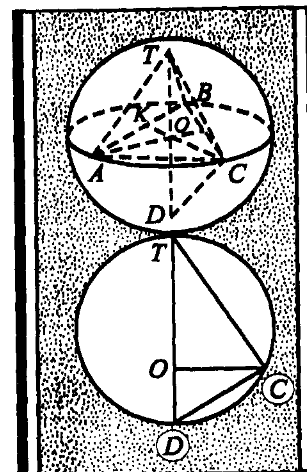
Рыс. 273

Указанне:

1) $AB = AC = 15$, $BC = 24$, O – цэнтр сферы, T – цэнтр упісанай акружнасці, K – пункт дотыку, $BK = KC$, $OT \perp (ABC)$, $OA = 13$ (рыс. 273);
2) ΔAKC, $AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = 9$;
3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AK = 108$;
4) $TK = r_{упіс.акр.} = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = 4$,
$AT = AK - TK = 5$;
5) ΔATO, $OT = \sqrt{AO^2 - AT^2} = 12$.

12. 2500π см^2.

13. $\frac{32\pi a^3}{81}$.



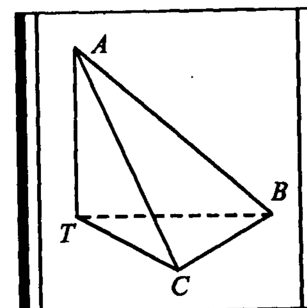
Рыс. 274

Указанне:

1) O – цэнтр ABC, TO – вышыня пірамiды, $AB = TO = a$, TD – дыяметр шара (рыс. 274);
2) ΔAKC,
$CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;
3) $OC = \frac{2}{3} CK = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;
4) ΔTOC, $TC = \sqrt{TO^2 + OC^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$;
5) ΔTDC, $TC^2 = TO \cdot TD \Rightarrow$
$TD = 2R = \frac{TC^2}{TO} = \frac{4a}{3}$, $R = \frac{2a}{3}$;
6) $V_ш = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi a^3}{81}$.

14. $4\pi a^2$.

15. $\frac{8\pi}{3(2 + \sqrt{3})}$.



Рыс. 275

Указанне:

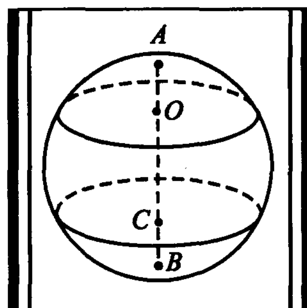
1) $S_{TBC} = S_{TBA} = S_{TAC} = 2$, V – аб'ём піраміды, S – поўная паверхня, r – радыус упісанай сферы (рыс. 275);
2) $S^2{}_{ABC} = S^2{}_{TBA} + S^2{}_{TBC} + S^2{}_{TAC}$,
$S^2{}_{ABC} = 12$, $S_{ABC} = 2\sqrt{3}$;
3) $\frac{1}{2} TB \cdot TA = 2$, $\frac{1}{2} TB \cdot TC = 2$,
$\frac{1}{2} TC \cdot TA = 2 \Rightarrow \frac{1}{8}(TA \cdot TB \cdot TC)^2 = 8$,
$TA \cdot TB \cdot TC = 8$;

4) $V = \frac{1}{6}(TA \cdot TB \cdot TC) = \frac{4}{3}$, $r = \frac{3V}{S_{поўн}} = \frac{2}{3+\sqrt{3}}$;

5) $S_{сферы} = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{4}{(3+\sqrt{3})^2} = \frac{8\pi}{3(2+\sqrt{3})}$.

16. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

17. $\frac{52\pi R^3}{81}$.



Рыс. 276

Указанне:

1) V_1 – аб'ём шаравога сегмента вышыні $h_1 = OA = \frac{2R}{3}$, V_2 – аб'ём шаравога сегмента вышыні $h_2 = CA = \frac{4R}{3}$, V – аб'ём шаравога слоя (рыс. 276);

2) $V_1 = \pi h_1^2(R - \frac{1}{3}h_1) = \frac{28\pi R^3}{81}$,

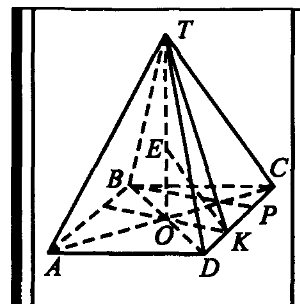
$V_2 = \pi h_2^2(R - \frac{1}{3}h_2) = \frac{80\pi R^3}{81}$;

3) $V = V_2 - V_1 = \frac{52\pi R^3}{81}$.

18. $\frac{448\pi}{3}$ см^2, $\frac{52\pi}{3}$ см^2.

19. 36π см^3.

20. $\frac{\pi a^3}{6}\sin^3\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}$.



Рыс. 277

Указанне:

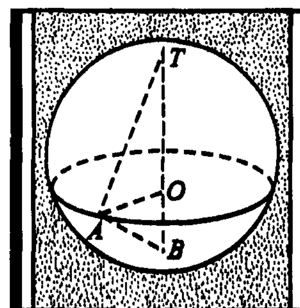
1) $OK \perp DC$, $\angle OKT = \beta$, $BC = a$, $\angle BCD = \alpha$, E – цэнтр шара, EK – бісектрыса вугла OKT, $BP \perp DC$;

2) ΔBPC, $BP = BC\sin\alpha = a\sin\alpha$, $OK = \frac{BP}{2} = \frac{a}{2}\sin\alpha$ (рыс. 277);

3) ΔEOK, $OE = r = OK \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2}\sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$;

4) $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3}{6}\sin^3\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}$.

21. $\frac{\pi}{H^2}(H^2 + r^2)^2$.



Рыс. 278

Указанне:

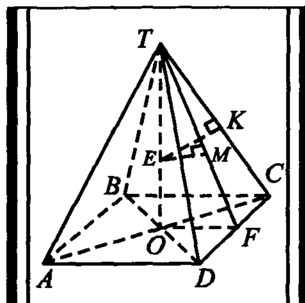
1) $TB = 2R$ – дыяметр шара, O – цэнтр асновы конуса, $TO = H$, $OA = r$ (рыс. 278);

2) ΔTOA, $TA = \sqrt{TO^2 + OA^2} = \sqrt{H^2 + r^2}$;

3) ΔTAB ($\angle TAB = 90°$), $TA^2 = TO \cdot TB$, $H^2 + r^2 = H \cdot 2R$, $R = \frac{H^2 + r^2}{2H}$;

4) $S_ш = 4\pi R^2 = \frac{\pi(H^2 + r^2)^2}{H^2}$.

22. 1600π см^2.



Рыс. 279

Указанне:

1) $DF = FC$, E – цэнтр упісанага шара, $EK \perp TC$, $EM \perp TF$, $EO = EM = 5$, $EK = 7$, $ET = x$ (рыс. 279);

2) $\Delta TOC \sim \Delta TKE \Rightarrow EK : OC = TK : TO$
$\Rightarrow OC = \dfrac{7(x+5)}{\sqrt{x^2-49}}$;

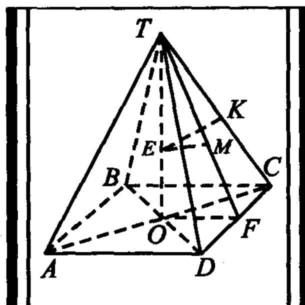
3) ΔOFC, $OC^2 = 2OF^2 \Rightarrow$
$OF = \dfrac{OC}{\sqrt{2}} = \dfrac{7(x+5)}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-49}}$;

4) $\Delta TOF \sim \Delta TME \Rightarrow OF : EM = TO : TM$,
$\dfrac{7(x+5)}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2-49}} = \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-25}} \Rightarrow x = 35$, $TO = x + 5 = 40$;

5) $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{TO}{2}\right)^2 = 1600\pi$.

23. 64π см^2.

24. $\dfrac{4\pi a^2 b^2}{2a^2+b^2}$.



Рыс. 280

Указанне:

1) $DF = FC$, E – цэнтр шара, $EK \perp TC$, $EM \perp TF$, $TE = a$, $EK = b$, $EM = EO = x$ (рыс. 280);

2) $\Delta TOC \sim \Delta TKE$, $EK : OC = TK : TO$,
$b : OC = \sqrt{a^2-b^2} : (a+x)$,
$OC = \dfrac{b(a+x)}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

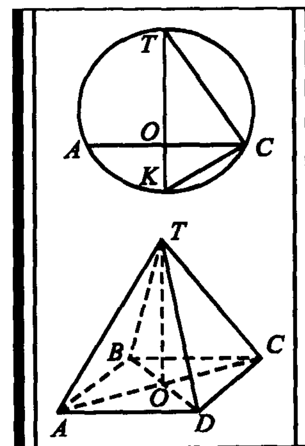
3) $OC^2 = 2OF^2 \Rightarrow OF = \dfrac{b(a+x)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2-b^2}}$;

4) $\Delta TOF \sim \Delta TME \Rightarrow OF : EM = TO : TM$,
$\dfrac{b(a+x)}{\sqrt{2}x\sqrt{a^2-b^2}} = \dfrac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow x^2 = \dfrac{a^2b^2}{2a^2-b^2}$;

5) $S_ш = 4\pi R^2 = 4\pi x^2 = \dfrac{4\pi a^2 b^2}{2a^2-b^2}$.

25. 3 см.

26. $\dfrac{4\pi a^2}{\sin^2 2\beta}$.



Рыс. 281

Указанне:

1) $AC = 2a$, O – цэнтр асновы, TO – вышыня піраміды, $\angle TCO = \beta$, $TK = 2R$ – дыяметр шара;

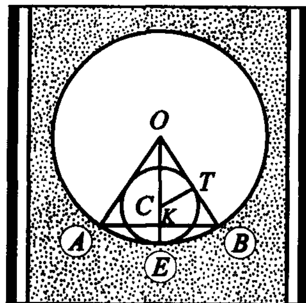
2) ΔTOC, $TO = OC\,\mathrm{tg}\,\beta = a\,\mathrm{tg}\,\beta$,
$TC = \dfrac{OC}{\cos\beta} = \dfrac{a}{\cos\beta}$ (рыс. 281);

3) ΔTCK, $TC^2 = TO\cdot TK$,
$\dfrac{a^2}{\cos^2\beta} = 2R(a\,\mathrm{tg}\,\beta) \Rightarrow$
$R = \dfrac{a}{2\cos\beta\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin 2\beta}$;

4) $S_ш = 4\pi R^2 = \dfrac{4\pi a^2}{\sin^2 2\beta}$.

27. $\dfrac{500\pi}{3}$ см^3.

28. $\dfrac{4\pi a^2 R^2}{(R+a)^2}$.



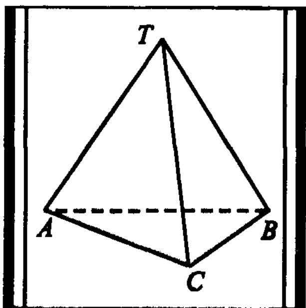
Рыс. 282

Указание:

1) $AB = 2a$, $OB = OE = R$, $CT \perp OB$, $CT = CE = x$ (рыс. 282);
2) $\Delta OTC \sim \Delta OKB \Rightarrow CT : KB = OC : OB$, $x : a = (R - x) : R$, $x = \dfrac{aR}{R+a}$;
3) $S_{сферы} = 4\pi x^2 = \dfrac{4\pi a^2 R^2}{(R+a)^2}$.

29. $\dfrac{640\pi}{3}$ см².

30. $\dfrac{4\pi a^2}{(\sqrt{3}+3)^2}$.



Рыс. 283

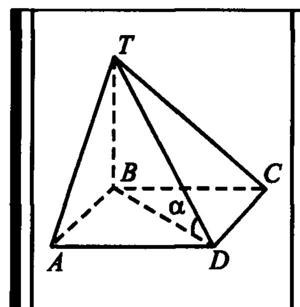
Указание:

1) $S^2_{ABC} = 3S^2_{TBC} = 3\left(\dfrac{1}{2}a^2\right)^2 = \dfrac{3}{4}a^4$, $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (рыс. 283);
2) $S_{поўн} = S_{ABC} + 3S_{TBC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \dfrac{3}{2}a^2 = \dfrac{a^2}{2}(\sqrt{3}+3)$;
3) $V_{TABC} = \dfrac{1}{3}S_{TBC} \cdot TA = \dfrac{1}{6}a^3$;
4) $r = \dfrac{3V_{TABC}}{S_{поўн}} = \dfrac{\frac{1}{2}a^3}{\frac{a^2}{2}(\sqrt{3}+3)} = \dfrac{a}{\sqrt{3}+3}$;
5) $S_{сферы} = 4\pi r^2 = \dfrac{4\pi a^2}{(\sqrt{3}+3)^2}$.

31. $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27\cos^3\alpha}$.

32. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

33. $\dfrac{a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha+\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\alpha}}$.



Рыс. 284

Указание:

1) $\angle ABT = \angle TBC = 90°$, $\angle TDB = \alpha$, $AB = a$ (рыс. 284);
2) ΔTBD, $TB = BD\,\mathrm{tg}\,\alpha = a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;
3) ΔTBA, $TA = \sqrt{AB^2 + TB^2} = a\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\alpha}$;
4) $S_{поўн} = S_{ABCD} + 2S_{TBA} + 2S_{TAD} = a^2 + TB \cdot AB + TA \cdot AD = a^2 + a^2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha + a^2\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\alpha}$;
5) $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot TB = \dfrac{1}{3}a^3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;
6) $r = \dfrac{3V}{S_{поўн}} = \dfrac{a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha+\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\alpha}}$.

Літаратура

1) Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983.
2) Лоповок Л.М. Сборник задач по стереометрии – М.: Учпедгиз, 1959.
3) Парахневич В.А., Парахневич Е.В. Сборник задач по геометрии – Мн.: Народная асвета, 1972.
4) Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии – М.: Наука, 1989.